

電子顕微鏡用電子銃の電位分布及び

電子軌道の算出

竹 松 英 夫

The Calculation of the Field Distribution and Electron Trajectory in Electron Microscope Gun.

Hideo TAKEMATSU

The characteristics of the electron microscope gun with a hair pin filament is studied by using a digital computer.

The field intensity is calculated by a relaxation method.

It is seen that the low beam current gun and high field intensity in the vicinity of the cathode tip are obtained when the tip of the cathode is placed near the Wehnelt surface as closely as possible and the Wehnelt is at high bias.

The mechanism of the hollow beam is explained by calculating the electron density at the plane, far away from the cathode, vertical to the optical axis.

I 緒 論

電子顕微鏡用電子銃内の電位分布及び電子軌道の算出を、従前より本学の電子計算機を利用する事に依り、継続して来たので、その概略を、極めて簡単に記載して見たい。本稿に於ては、主に Hair Pin 型の陰極について考えてみる。現在広く用いられている普通の電子顕微鏡用電子銃（以下単に電子銃と呼ぶ）は第 1 図に示す様に、タングステン Hair Pin 型陰極と、Wehnelt Cylinder 及び陽極とから成り立っている。電子銃の電子光学的諸性質を論ずる時は、各電極の構造や静電界は軸（光軸）に対して廻転対称と考え、主に近軸光線を問題にする。故に斯る近軸光線を形成する電子軌道を論ずる際には先づ光軸上及びその附近の電位分布を知る事が必要となる。

II 電位分布の算出

1. 近似値計算法

上述の構造を有つ銃内の電位分布を詳細に正確に解析的手段で求むる事は、出来ない事であり、実験的には抵抗回路網や電解槽を用いても求められる筈ではあるが、未だ斯る型の銃に対しては、詳細なる測定は行われていない。

近似値計算（数値計算）は緩和法に依るのが適当と考えるが、此を詳細に逐行するには、電子計算機を使用せずしては到底不可能である。筆者は専ら NEAC 2203 を使

用したのであるが、それとても記憶容量の不足その他で、目的とする広範囲の値を短時間に得る事は出来ずに後述の様に何回もの細分化を行い、同じ形の計算を繰り返す事に依り漸く所期の結果に到り得た。

扱近似値計算法を極く簡単に説明すると、前述の様に軸に対し廻転対称の静電場に対しては Laplace の方程式は r, z を夫々軸に垂直又は軸方向の円柱座標とする、周知の如くに、 ϕ を potential とする事に依り

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

と書ける。此処で銃内に或る領域を設定する、此の与えられた領域の境界上では ϕ は既知とする。此の領域を網目に区切りその格子点 (i, j) について(1) 式を差分方程式に書き直すと、(此処で i, j は夫々 r 方向及び z 方向の格子点のナンバーである。)

$$\left(1 + \frac{1}{2i}\right) \phi_{i+1,j} + \left(1 - \frac{1}{2i}\right) \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 4\phi_{i,j} = 0 \quad (i \neq 0) \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$4\phi_{1,j} + \phi_{0,j+1} + \phi_{0,j-1} - 6\phi_{0,j} = 0 \quad (i=0) \dots\dots\dots(3)$$

此処で $\phi_{i,j}$ は (i, j) なる格子点の potential, 従って(3) 式の $\phi_{0,j+1}, \phi_{0,j-1}, \phi_{0,j}$ 等は $r=0$ 乃ち軸上の potential を示す事は言うまでもない。

緩和法で、 k 回目の計算迄に得られた最も新しい ϕ の近似値を用いて次の新しい近似値を格子点 (i, j) に於て求むるには、その値を $\phi_{i,j}^{(k+1)}$ とすると次の如くして求められる。

$$R^{(k)}_{i,j} = \frac{1}{4} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2i}\right) \varphi^{(k+1)}_{i+1,j} + \left(1 - \frac{1}{2i}\right) \varphi^{(k)}_{i-1,j} + \varphi^{(k+1)}_{i,j+1} + \varphi^{(k)}_{i,j-1} \right\} - \varphi^{(k)}_{i,j} \quad \dots\dots(4)$$

$$R^{(k)}_{0,j} = \frac{1}{6} \left(4\varphi^{(k+1)}_{1,j} + \varphi^{(k+1)}_{0,j+1} + \varphi^{(k)}_{0,j-1} \right) - \varphi^{(k)}_{0,j} \quad (5)$$

$$\varphi^{(k+1)}_{i,j} = \varphi^{(k)}_{i,j} + \alpha R^{(k)}_{i,j} \quad \dots\dots(6)$$

此処で α は加速係数と呼び

$$1 \leq \alpha \leq 2$$

とする。(以上の式の Reduction は本稿では省略することにする。)

計算の収斂速度は α の値に非常に敏感であり、此の値の撰択に際しては充分考慮すべき点があるが、その最適値を求める事は、夫れ自体大分労力を要する題目と考えられる。筆者は緩和法を行っている途上に於て α の値を数回増加する事に依り収斂を早める方法を行った。此の時の α の値の増加の仕方は、数回の計算例で知り得た、 $R^{(k)}_{i,j}$ の値 (此を剰余と呼ぶ) が計算値の精度を決める訳であるが、筆者は銃内の電極に与える最高電位 (陽極電位) を $50 \times 10^8 (V)$ としたので、各回の格子点の計算で剰余の絶対値の最高値を $\left| R^{(k)}_{i,j} \right|_{\max}$ とすると

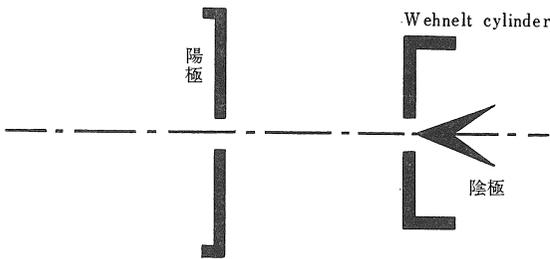
$$\left| R^{(k)}_{i,j} \right|_{\max} < 0.1 (V)$$

となると、計算を停止させる様にした。

与えられた領域に対する合計の計算時間は、格子点数に依っても大きく左右される訳であるが、上述の $\alpha, R^{(k)}_{i,j}$ を決める方法に於ては大抵の計算例は 100回 前後の緩和法を行って収斂している。

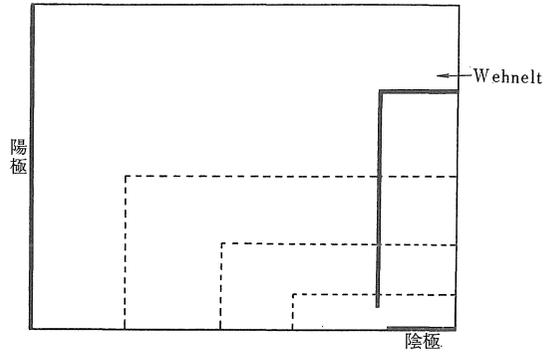
2. 計算結果 (数種の計算例)

第 1 図に描かれる構造を有つ実際の銃の、電位分布を求めるに当っては、最初の近似としては、第 2 図の様に



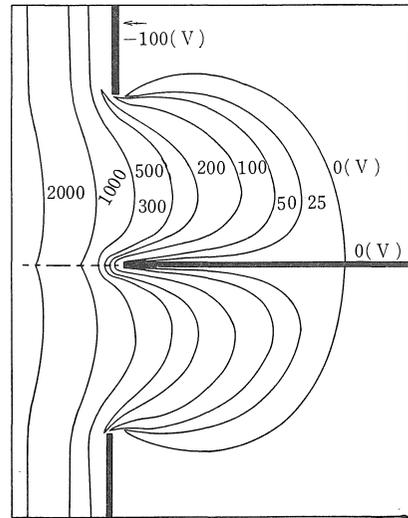
第 1 図

陰極は太さのない (直径 $0mm$) 半直線とし、此を光軸に一致させ、Wehnelt も厚さを有たぬ円板と仮定し、

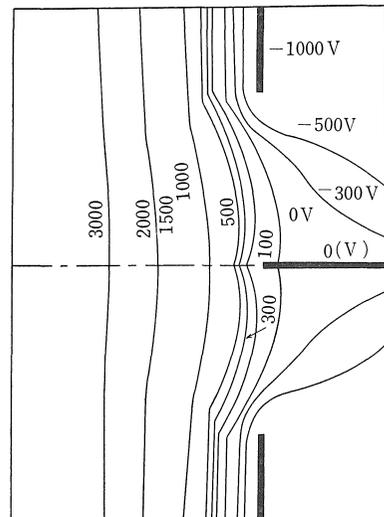


第 2 図

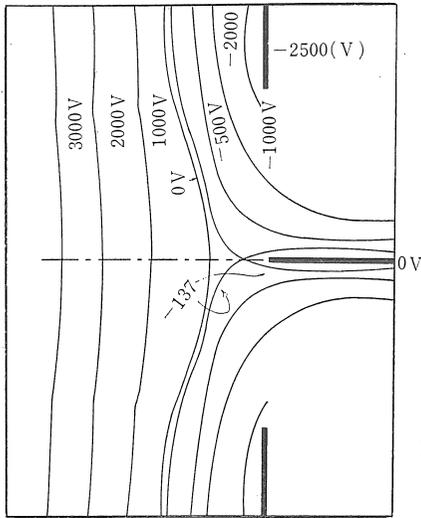
陽極は Wehnelt や陰極先端からは遙か遠方に在ると考えられるが故に孔を有たぬ円板と仮定して、光軸に垂直に在ってその中心を光軸に一致させた。此の場合、実際



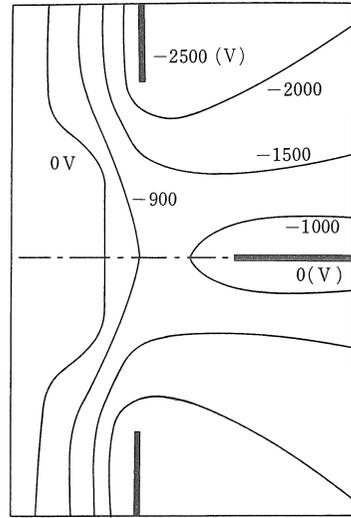
第 3 図



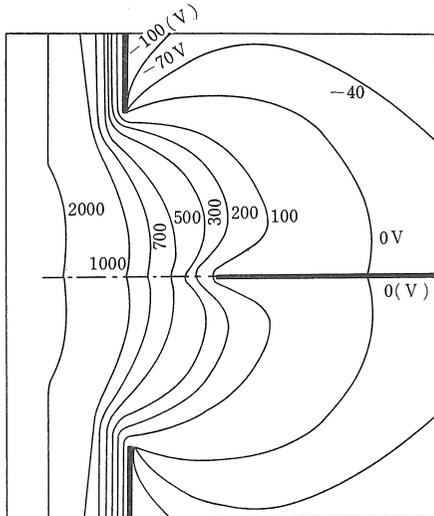
第 4 図



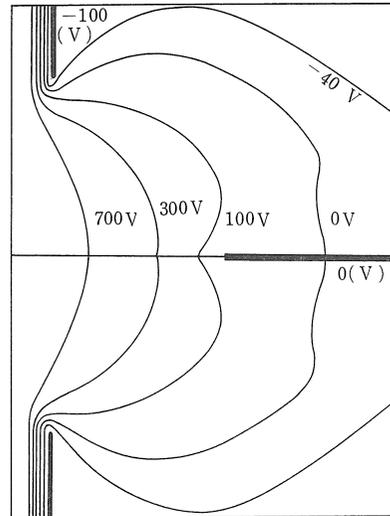
第5図



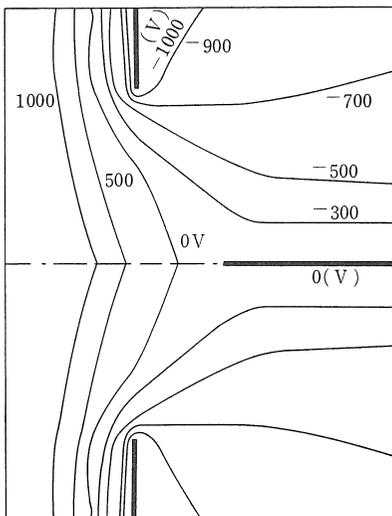
第8図



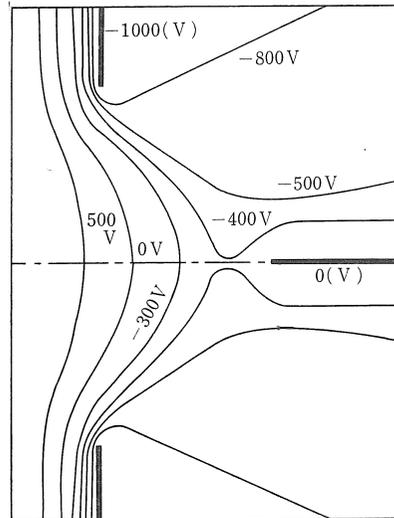
第6図



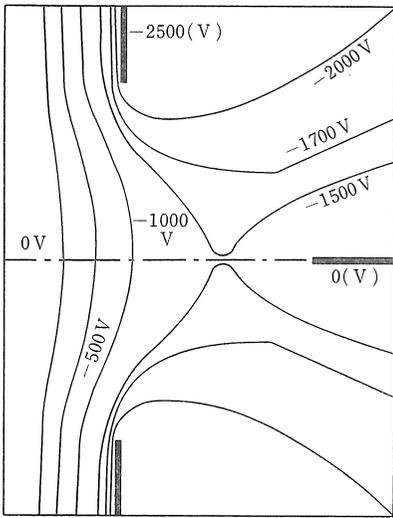
第9図



第7図

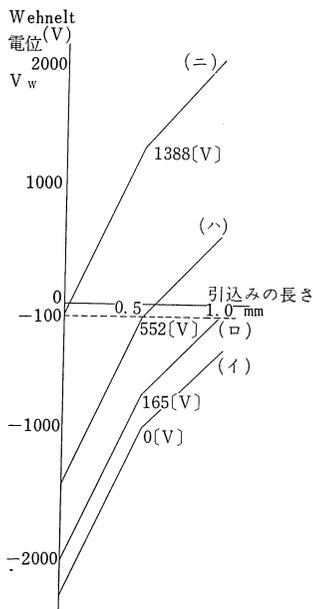


第10図



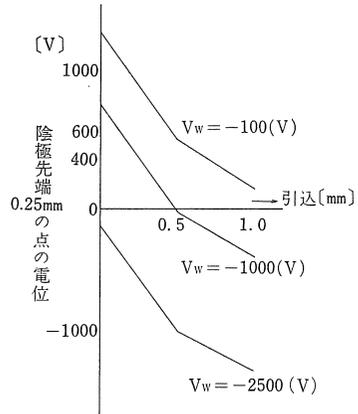
第 11 図

の銃から考えて Wehnelt の孔径を $2(\text{mm})$ ，その面から陽極は $20(\text{mm})$ 離れたものとした．前述の緩和法を行い各格子点の電位分布を求めるに当たっては，実際には多くの場合，陰極，Wehnelt，陽極の電位を夫々 $(0, 0, 1)(\text{V})$ の場合と $(0, 1, 0)(\text{V})$ の場合とに於て行い，最後に例えば陰極 $(0(\text{V}))$ ，Wehnelt $[-1000(\text{V})]$ ，陽極 $[50 \times 10^8(\text{V})]$ の場合の電位は，前者の結果を 50×10^8 倍し，此れに後者の結果を -1000 倍したものを重畳させて求めた．勿論，此の $(0, 0, 1)(\text{V})$ $(0, 1, 0)(\text{V})$ の計算に於ては，前述の $|R_{i,j}^{(k)}|_{\max}$ は $10^{-5}(\text{V})$ 程度に押えてある．斯く計算を行うと，任意の陽極電位，We-



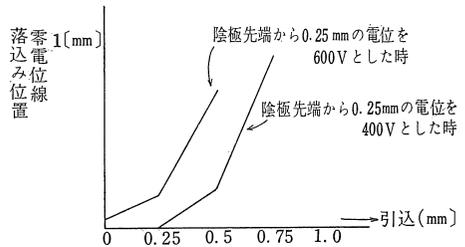
第 12 図

hnelt 電位の組合せを求めるのに時間を節約出来る．第 2 図は計算を行わんとした領域に，三電極を配したものであるが，網目の数は $350 \sim 700$ 程度であるから，第一回の近似は大略の電位分布を知るに留まるが，筆者の狙いは先づ陰極附近の電位分布を詳細に求める事に在るので次には，第 2 図の点線の範囲を縦横 2 倍ずつ拡大する．



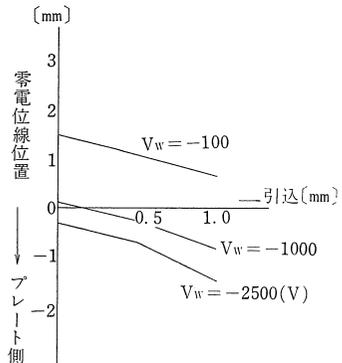
第 13 図

その時の領域の境界値は上の結果を使う．斯る操作を数回繰り返す事に依り，微小区域を拡大し得て詳細なる電位分布を得る．第 3 図～第 11 図は第 3 回目の拡大の結果である．実験上（実際に電子銃を使用している状態）



第 14 図

に於ては，その性質は，Wehnelt の孔径，その孔の厚さ，孔の端の形状，Wehnelt の陽極側に近い面よりの



第 15 図

陰極先端の引き込みの大きさと、陽極の電位を一定に保つとき、Wehnelt の電位等で決まる。此処では陰極は 0 (V) に保つとしておく。

上述の近似値計算では、此等の肝要な要素の内で一応採り上げられ得る処の Wehnelt の電位の変化や、陰極先端の Wehnelt 面よりの引込みの変化に対する電位分布の影響を考える事にする。本稿に於ては、上述の様に Wehnelt 孔径を (2mm) とした時、陰極の引込みを Wehnelt 面より 0 (mm), 0.5 (mm), 1 (mm) に変化させ亦夫々に対し Wehnelt 電位を -100 (V), -1000 (V), -2500 (V) とし与えた場合の、電位分布の計算結果より求められた等電位線は概略を簡単に、以上の図に紹介するに留める。第12図には此の計算を基にして求めて陰極の先端軸上 0.25 (mm) の点の電位を等しくする為には夫々の引込みの陰極配置に対して、Wehnelt に与えるべき電位 V_w を求めた。第13図には Wehnelt の電位 V_w を各種の引込みの陰極に対して等しく押えた時、陰極の先端 0.25 (mm) の点の電位を示した。

第14図には陰極の先端 0.25 (mm) の点の電位を 400 (V) 又は 600 (V) に夫々等しくする時、陰極上に落ち込む零電位線の位置を示した。

第15図は夫々の Wehnelt 電位 V_w に対する軸上の零電位線の位置を正す。

3. 結 論

以上は筆者の行った計算例であるが、此れ丈から判る事柄を要約してみる。

実際の電子顕微鏡用電子銃に要求される事は

- 成るべく Beam Current を少くして使用すること。
- 空間電荷の影響を無くするために陰極先端電界を強くすること。

である。

- の条件を充すためには零電位線が陰極先端になるべく近く落ち込んで、電子放出面積を小さくすること
- の条件には陰極先端の電位が高い事。

であって、a) b) の条件には、図示した例でも判る様に陰極の先端の引込みをなるべく少なくして Wehnelt に与える負電位は、適当に高くする事。

に依って充される。

此の事は実際の電子銃の実験上に於ても極めて重要なことである。

III 電子軌道の算出及び

Hollow Beam の成因に就いて

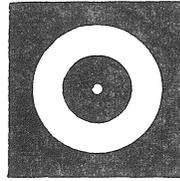
1. Hollow Beam の観察

電子銃の Wehnelt 孔に対する陰極先端の引込み位置

が前節の結論の様に定められる時は、実験的に、Electron Beam の性質は Wehnelt 電圧 ϕ_w と陽極電圧 ϕ_a との比

$$\eta = \frac{\phi_w}{\phi_a} \quad (1)$$

に依り決定される。実験上では、陽極板の次に(下方に) Lens も絞りも入れないで、蛍光板のみを入れて、その発光状態を観測する時、 ϕ_w を小さい負の値から漸次大きくする過程に於て、 η の小さい間はその様相自体にも変化はあるのであるが、要するに第16図の様に中央部が暗くその周辺部が明るい環状の発光を示す。此は中央



第 16 図

部の電子密度が低く、周辺部がある処迄は密度が高い訳であるが、斯る状態の蛍光板発光を示す Beam を Hollow Beam と称している。前節の電位計算を続行させ Wehnelt 孔の端の厚さやその形状、特に陰極の先端を Hair Pin 型に可成り近似し得たので、此の節では、陰極表面(殊に先端附近)より熱電子放射させた場合の電子軌道の算出を行い Hollow Beam の成因を計算上より検討した事を極く簡略に記して見たい。

2. 電子軌道の算出方法

爾来、廻転対称の静電界に於ける電子軌道を示す微分方程式は一般的に解く事は極めて困難である。電子顕微鏡を使用する実際に於ては、普通電子銃は、Hollow Beam を生ずる状態に於て使用するのではなく、軸上の輝度が高い状態で使用する、換言すると Wehnelt の負電位を増した状態で使用するのであるが、此の場合に於いて、軌道方程式

$$2\phi \frac{d^2 r}{dz^2} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dr}{dz} \right) \left[1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \right] \quad \dots\dots\dots(2)$$

は、電子が Z 軸に近く且平行若くは小なる角度で運動すると仮定する近軸光線なる条件を考慮して改変すると(式の Reduction は一切省略するが)近軸光線に対する軌道方程式としては

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{\phi_0'}{2\phi_0} \frac{dr}{dz} + \frac{\phi_0''}{4\phi_0} r = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

を得る。茲に ϕ_0 は ($r=0$), Z 軸上の電位で、 ϕ_0' , ϕ_0'' は夫々 Z についての微係数を表わす。要するに(3)式を解く事に依り、Z と $\phi_0(z)$ が判れば、周知の様に夫に依り r の値乃ち軸外の電子の位置 (r, z) が決定出来る。斯くして、従来は専ら(3)式を解く事が行われて来た。

然し Hollow Beam を論ずるには、陰極面上任意の点より、任意の角度をなして放射させた電子の軌道を論ずるので、近軸光線に対する(3)式を解いて得た結果は不適当と考えられるので、軌道方程式の原の式に戻って考え、此を電子計算機を使用して解く事にした。その方法

は色々と考えられると思うが、先づ(2)式に戻って、 ϕ は格子点上に於ては既知なものと言えるから、 $\frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{\partial \phi}{\partial z}$ をその格子点の近傍に於ける電界 E_r, E_z 成分として此も小区域に於ては一定と考えられる計算可能なものとなり、小区域に於ける r の値は少くとも $z, \phi, \frac{\partial \phi}{\partial r} = -E_r, \frac{\partial \phi}{\partial z} = -E_z$ に特定値を与えて、(此の場合計算区域が異なれば Z は勿論、 $\phi, \frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{\partial \phi}{\partial z}$ も亦その区域に対する値を採る事は言う迄もないか) その区域毎に求まる事が推論されるから、此を計算機に於て工夫して求めた。此は Runge-Kutter 法に依り或る程度の正確な値を得る事が出来たが、本稿ではその詳細には触れる余裕がない。

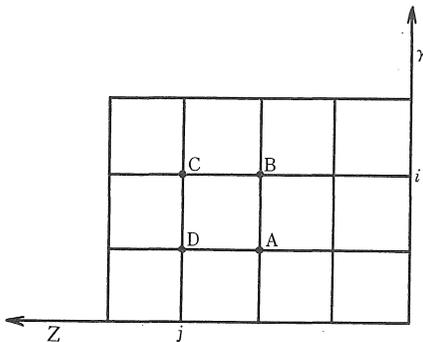
第2の方法は所謂運動方程式

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 r}{dt^2} &= -e E_r = e \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= -e E_z = e \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (4)$$

を解く事である。Hollow Beam の問題以来、此を主に使用しているので、此の式の電子計算機での解法の要点を述べると、(4)式を解くと勿論

$$\left. \begin{aligned} Z &= -\frac{e}{2m} E_z t^2 + V_{z0} t + Z_0 \\ r &= -\frac{e}{2m} E_r t^2 + V_{r0} t + r_0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

と書けるが(5)式の V_{z0}, V_{r0}, Z_0, r_0 が分れば、 t をパラメーターとして、 Z, r が求められる。

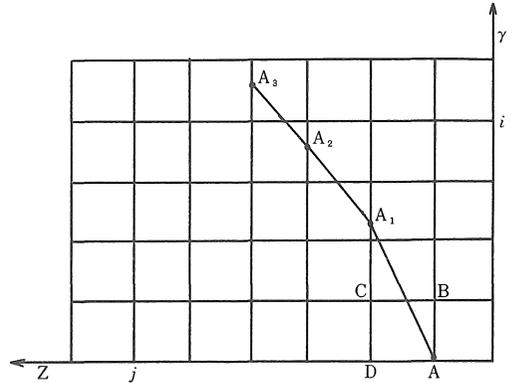


第 17 図

電界の計算法は、

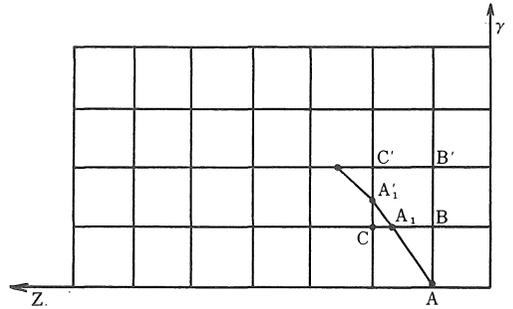
第17図に於て格子 (此の場合は正方向格子) $ABCD$ の内部の電界は、一様とし、 $ABCD$ 点の電位を夫々 $V_{i,j}, V_{i+1,j}, V_{i+1,j+1}, V_{i,j+1}$ とすれば、電界 E_z, E_r は次式で求める。 L は格子間距離である。

$$\left. \begin{aligned} E_z &= -\frac{\frac{V_{i+1,j+1} - V_{i+1,j}}{L} + \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{L}}{2} \\ E_r &= -\frac{\frac{V_{i+1,j+1} - V_{i,j+1}}{L} + \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{L}}{2} \end{aligned} \right\}$$



第 18 図

軌道計算するには、第18図に於て、 A から出た電子が Z 方向へ 1 格子間隔進む時間を計算し、その時間で r 方向へ進む距離を計算する。然し A_1 の様に r 方向へは 1 格子間隔以上電子が飛ぶことがある。この時は正方形 $ABCD$ の中で計算された電界を用いる為に誤差が大きくなると考えられるから、 r 方向へ進む距離が 1 格子間隔以上になる場合は計算をやり直して、 r 方向へ A から 1 格子間隔進む時間を計算し、その時間で Z 方向へ進む距



第 19 図

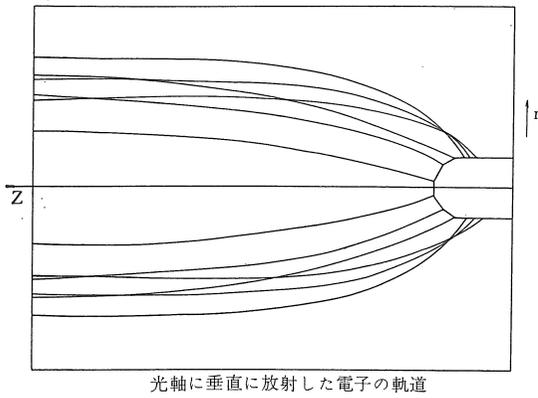
離を計算させた。第19図。然し次に 1 格子間隔 Z 方向へ進む時間を計算する時用いる電界は $BB'C'C$ の正方形から求める電界を使用する為都合悪くなる。其処で第19図で A から出た電子が A_1 に達した時、つぎに Z 方向へ飛ぶ距離は A_1C とし、此の距離だけ電子が飛ぶ時間を計算し、その時間で r 方向へ飛ぶ距離を計算する。次に(5)式では z_0, r_0 は各計算段階の初位置、 V_{z0}, V_{r0} はその位置での速度を示す訳であるから、次の段階を計算する時の速度は

$$V_2 = -\frac{e}{m} E t + V_1$$

とする。 E は X_1 と X_2 の間の電界で V_1 は X_1 の点の速度、 V_2 は X_2 の点の速度である。

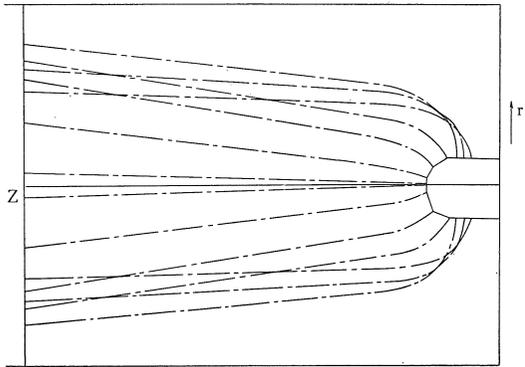
軌道算出例

実際の Hair Pin 型陰極の先端の形状に近似を進めて電位計算を行ったものとして、第27図に示す段階のも



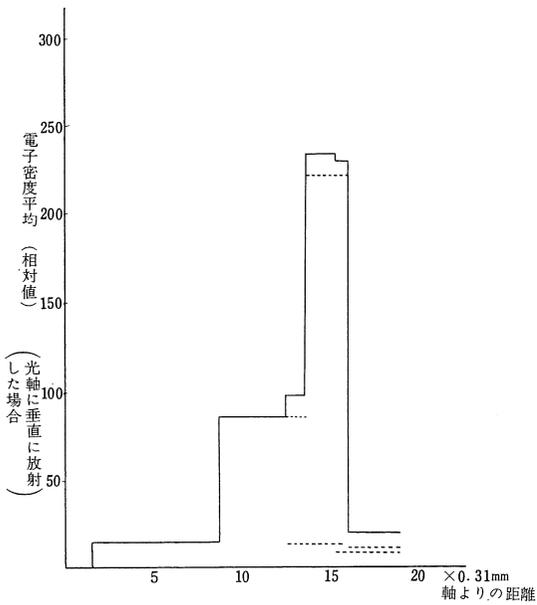
光軸に垂直に放射した電子の軌道

第 20 図

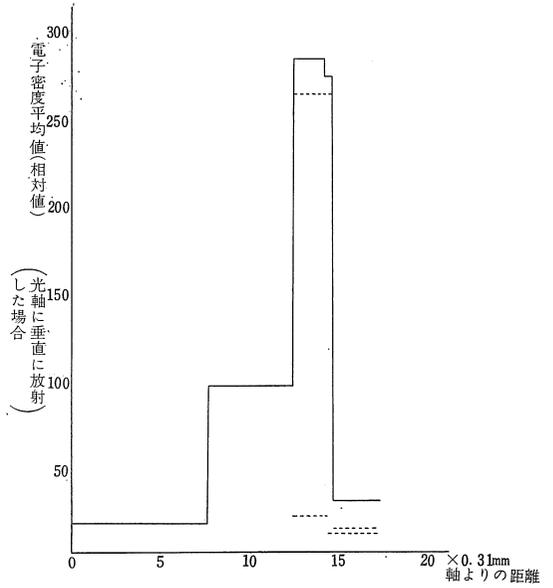


光軸に平行に放射した電子の軌道

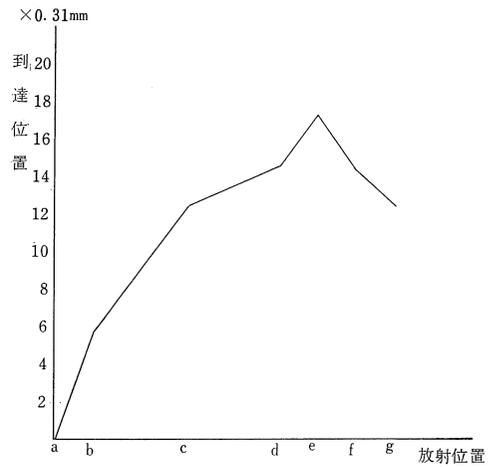
第 21 図



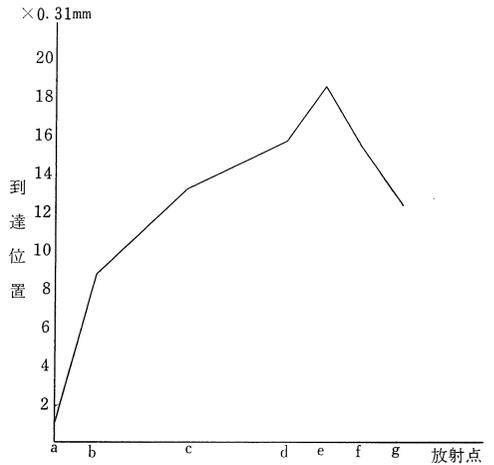
第 22 図



第 23 図



第 24 図



第 25 図

のについて、軌道計算結果の 1 例を以下に述べる。

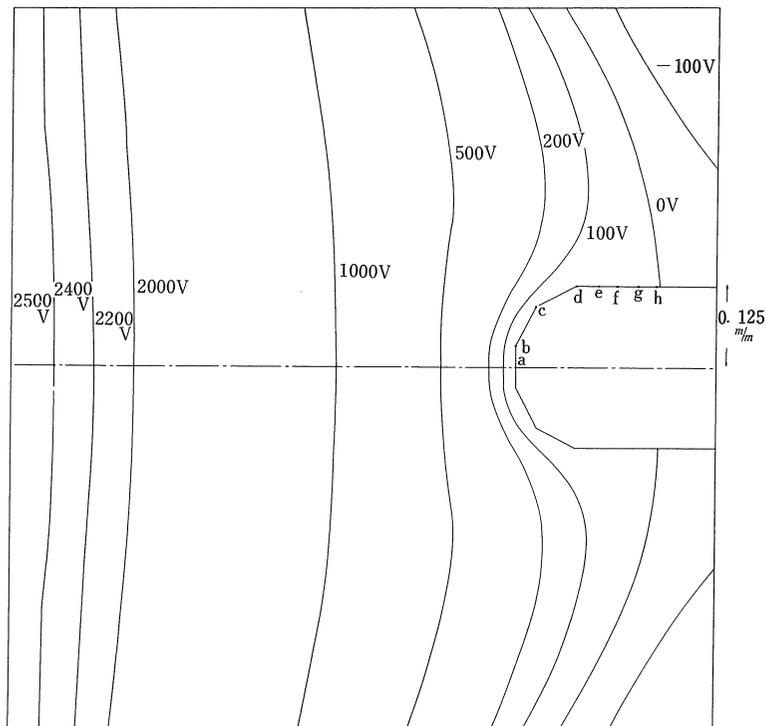
此の陰極面上よりの電子は格子点より放射させ、相隣

れる2格子間より放射される電子は遠方での到達点については、此の両格子よりの電子の中間に在ると言う仮定をした。亦単位面積当りの放射電子数は、加熱温度を一定として、何処でも放射面に於ては一定密度であると仮定した。実際の使用温度は $2500(^{\circ}K)$ と仮定した時、放射熱電子の初速度は $0(eV)\sim 0.3(eV)$ 程度のEnergyを有ち、その放射方向は放射面に対して $0^{\circ}\sim 180^{\circ}$ の角度範囲に分布すると考ふるべきであるが、筆者は、種々の放射可能な格子点より、上述のenergyの範囲で上述の角度範囲の電子を多数採って、その描く軌道の傾向を視たが、結論としては、同一格子点よりの放射電子の初速度Vectorの差は、陰極放射後暫時進む間の軌道の形成には差を示すが、軌道全体の傾向を決める肝要な事は放射位置が何処かと言う事である。第20図及び第21図は初速度が $0.19(eV)$ で陰極より光軸に平行又は垂直に放射された電子の軌道を1例として示した。陽極電圧 $50\times 10^3(V)$ 、Wehnelt電圧 $-1000(V)$ 、Wehnelt孔径 $2(mm)$ 陰極先端の引込み $0(mm)$ 、陰極の太さ $0.25(mm)$ の例である。猶仮想観測面は陰極先端より陽極側 $1.65(mm)$ の軸上で軸に垂直に立てた平面とした。第22図は光軸に平行、第23図は垂直に放射した電子の夫々到達面上での電子密度の

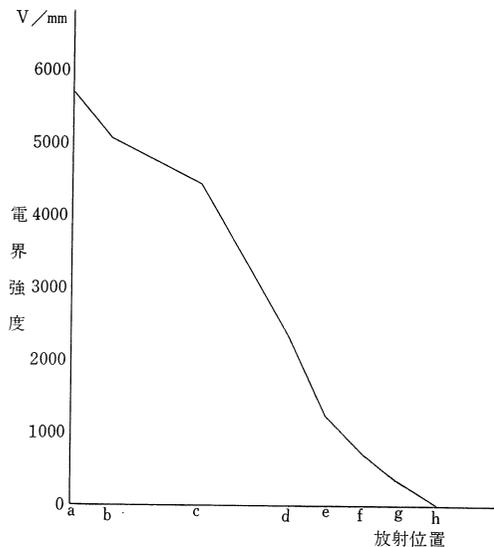
平均値分布を軸よりの距離に対して示したものである。

第24図は平行、第25図は垂直に陰極より放射された電子の夫々放射位置と到達面との関係を示した。此の場合電子密度分布は如何にして計算したか一言する。

前述の様に、相隣れる格子点間(放射点間)の位置より放射した電子は遠方の到達点では、2格子(放射点)よりの放射電子の到達点の間に在るとの仮定より、観測面に於ては、相隣れる放射点よりの電子の到達点が軸より

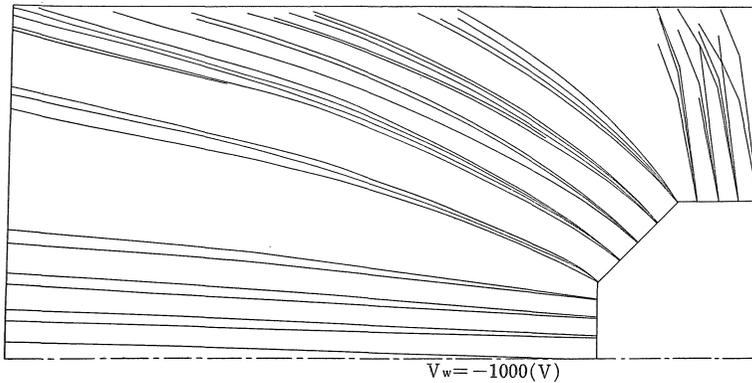


第 27 図

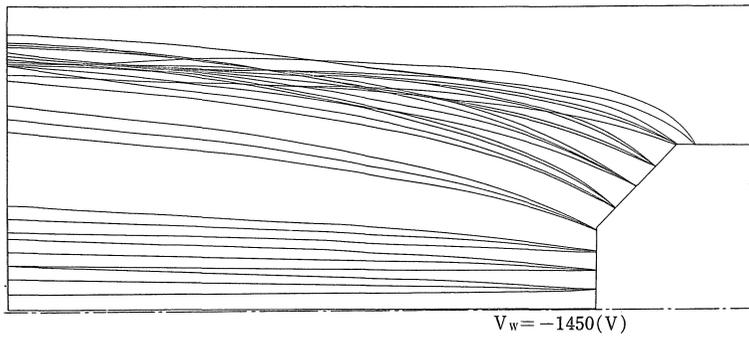


第 26 図

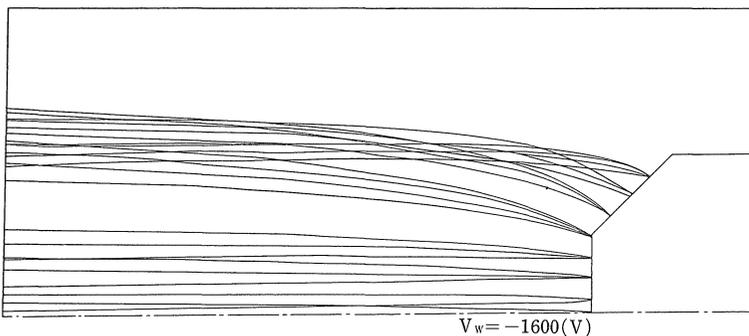
r_1 及び r_2 の位置に在るとすれば、その中間より放射した電子は、凡てを考えると r_1 及び r_2 を半径とする円に依り囲まれる円環内に在る筈である。(陰極の放射点は全体としては放射円周になるから、到達点も、陰極を回転体として考えると、全体としては到達円になる)。故にその円環の面積を求めておき、放射2格子間より計算される放射陰極面積が計算されれば、此れが言わば放射電子数に比例する訳であるから、この後者の面積を前者の円環面積で割れば、同様な計算を他の格子間についても行う事に依り、此等の値の相対関係が、一応求むる電子密度分布の平均値を比較する要素となる。第22図、第23図に示す様に、Wehnelt電圧 $-1000(V)$ の例に於ては軸に近い範囲の電子密度の相対値が、軸より遠ざかった或る範囲迄のものに比して、遙かに低い事が判る。換言すれば、螢光板上の発光は軸附近(中心附近)が弱く、周囲が或る範囲迄は可成り強く発光している事を示している訳である。乃ち円環状の発光する事を示す。以上は



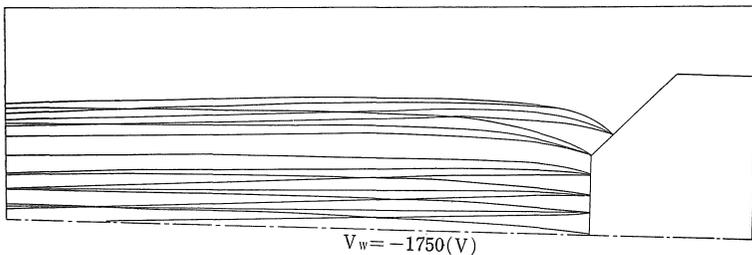
第 28 図



第 29 図



第 30 図



第 31 図

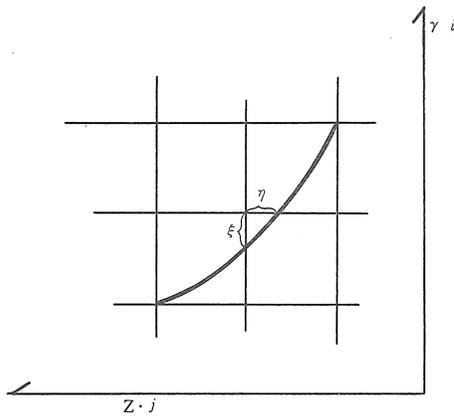
断った様に陰極面を軸に平行と、垂直に出た電子についてのみ計算したが、前述の様に他の初速度を有つ放射電子に就いても似た平均電子密度分布を示して、中央部に於て極めてその値が小なる事が言えた。要するに全体と

して円環状の発光を行い Beam は Hollow Beam を形成している事が説明出来た。

第26図は放射陰極表面附近の電界を示す。猶ほ $g \sim h$ の範囲は電界が低く空間電荷制限領域と推察し得るので、電子を放射せしめる事は止めた。筆者の計算例は陰極先端と陽極間は $10(mm)$ 陰極直径は $0.25(mm)$ の例で、仮想観測面を陰極先端 $1.65(mm)$ の位置に置いてあるが、実験的には陽極面より遙か後方で観測する。此の観測面の位置の差は計算結果に如何に影響するか。第27図には、陰極附近の等電位線の有様を示してある。(Wehnelt $-1000(V)$) の計算例の場合である。此に依っても推察出来る様に、 $1.65(mm)$ の位置に在る仮想観測面附近は、等電位線は殆んど平行して、軸には垂直である。多少の彎曲は認められる結果 $1.65(mm)$ の面を通過した後電子は必ずしも今迄の軌道の延長方向とは言えず、僅少の拋物線化は起るが然し此れは僅少で問題とならず、密度分布の大勢には影響を与えず $1.65(mm)$ の点での Hollow Beam の成因説明で差し支え無いと考える。猶 Hollow Beam の形状に関しても、陰極先端が Hair Pin 型であるか、先端が曲率半径 1μ 程度でその根本の太さが $0.2mm$ 程度の所謂 Point Filament 型であるかに依り当然差を生じて来るが Hollow Beam の出来る原因については此の計算で定性的に明らかになったと言える。

猶 Wehnelt の負電位を $-1000(V)$ より増加させて行くときの、陰極よりの電子放射領域の変化及び、Beam の形状変化を第28図より第31図に示した。要するに負電位の高い時は前節の結論の様に放射領域は先端部に限られ、Beam の広がり

は狭まってくる。遂には放射電子は光軸に交わる軌道を描き所謂 Cross Over Point を作る。普通銃は此の状態に於いて使用する。但し此の説明図は先述の Hollow Beam の計算例の陰極近似より1段階前の近似の陰極形



第 32 図

である。又上下対称であるから上の部分のみ書いてある。

附 記

電位計算を行うに当って、電極の表面が最初より値の判っている境界となるが、その境界線は直線ではなく、曲線を示す事が多くなる。此の事は Wehnelt の孔端を境界とした時にも言える訳であるが、斯る境界の近くの格子点の電位を計算するには第 1 節の $R_{i,j}^{(k)}$ (4) を次の如く改変する。

$$R_{i,j}^{(k)} = \left\{ 1 / \left(\frac{2}{\eta} + \frac{2}{\xi} - \frac{1-\xi}{i\xi} \right) \right\} \left\{ \frac{2\varphi_{i,j-1}^{(k)}}{\eta(1+\eta)} + \frac{2\varphi_{i,j+1}^{(k+1)}}{1+\eta} + \right.$$

$$\left. \frac{\varphi_{i+1,j}^{(k+1)}}{1+\xi} \left(2 + \frac{1}{i} \right) + \frac{\varphi_{i-1,j}^{(k)}}{\xi(1+\xi)} \left(2 - \frac{1}{i} \right) \right\} - \varphi_{i,j}^{(k)}$$

茲に $\eta \leq 1$, $\xi \leq 1$. 第 32 図参照

$\eta = \xi = 1$ の時は $R_{i,j}^{(k)}$ は (4) の式になる。

此を使用して計算しても、陰極境界を格子点を結んで出来る直線にしても、先述の Hollow Beam の計算例の程度に近似を進めた陰極の場合では、その周囲の格子点の電位分布には、階段な変化は認められない。

軌道を放射させる点にしても、斯る曲線境界面の時、陰極表面格子点以外の曲面上の点を選ぶ事も可能であるが、此等の詳細は本稿では述べる事は一切省略する。

む す び

以上筆者のこれ迄行った電子計算機を使用しての計算結果より、その内数種の例のみを挙げて、その概略を説明した。

電位分布計算にしても、軌道計算にしても、その方法には今後も精度及び計算速度の向上と言う点に於て充分考察すべき点を多々痛感するが、もう一つ望ましい事は冒頭にも一寸触れたが、広範囲の状況を成るべく短時間に精度よく掴み度いのであって、此の事は実験上からの条件や要請を充分に考慮して決めるべき要素が多分にあるが、出来る事なら筆者の使用した計算機の 10 倍程度の能力のあるものが望ましいと切に思う。

終りに、実験上の観点より色々御示唆を頂いた名古屋大学の丸勢進教授及び存分に電子計算機を使用する機会を与えられた大学当局や亦使用に当って御協力下さった計算機室の小林敏子氏に心より御礼申し上げます。

参 考 文 献

Relaxation Methods D.N.de G. Allen