

発振器の相互結合現象について

(脳と神経の電気回路的, 数学的モデルについて)

新 美 吉 彦

Summary—This paper deals with the mathematical model and the electrical one, of man's nervous systems and brain, which will be useful for the medical electronics and a automatic control engineer, and consists of four parts.

First, We are devoted to the main properties and the organisms of nervous system and brain, with which the models have to possess.

Second, Nagumo's active line model, that is neuristor, and Walter's speculatrix are described. Since these models have very interesting properties, there is the description about these models and their characters in details.

Third, Our proposing models are studied mathematically and signal-flow-graphically, and are compared with the above described models.

Finally, Electronic circuits using tunnel diode are dealt with, which is only one example of our models, and therefore, other models having the interesting properties may be made of electronically possible.

Yoshihiko Niimi

概 要

ここでは脳と神経の機能の電気回路的及び数学的モデルを作ることを考察した。そこで先づ脳と神経の機能についてその概略を文献(1)によって解説し、今日迄に考えられたモデルのうち、南雲氏の能動線路(ニューリスターモデル)と、W.G. ウォルター氏のマシナ・スペクラトリクスについてその特質を述べ、筆者の考えたモデルとの比較を試みた。その後、その数学的解法として Krylov-Bogoliubov 氏の漸近法と平均化法の筆者によって工夫された改良型を述べ、筆者の考えた一番簡単な場合について、その解法を試みた。

1. 人間の脳と神経の機能

先づ脳について考える前に、脳の定義が問題になると思われる。しかし現在の段階では科学者によってさえ脳は想像の器官をでない。これをある生理学者は「魔法の織機」と呼び、ある人は「さざ波がその水面にパターンを織りなす静かな水」という文学的表現を用いている。

しかし、その特長的機能について、現在迄にわかっていることをいくつか列挙すると、

1.1 人間の脳の機能：

1) ある心像(イメージ)を長時間保持し、後になってそれを思いかえす作用。

2) 可能ないくつかの反応のうちから、1つの反応をえらぶだけの時間おさえておくことができる。動物ではこのような抑制作用はない。

3) その他、観察、記憶、比較、評価、選択、自己の予測を利用しようとする。すなわち、多くの信号を受容し、相関させ、貯蔵し、生産することができる。

4) 脳活動の精巧さは、その神経単位(細胞)の数の

膨大さによるのではなく、『それら相互結合の豊かさ』による。例として、2つの神経単位細胞によって可能な行動の様式を考えてみる。細胞をA及びBと名づける。

- (1) 両者とも活動しない。 (0)
- (2) Aだけが活動する。 (A)
- (3) Bだけが活動する。 (B)
- (4) A, B両者が活動する。 (A+B)
- (5) AがBを駆動する。 (A→B)
- (6) BがAを駆動する。 (B→A)
- (7) AとBとが相互に駆動する。 (A↔B)

このように2つの単細胞によっても多様な活動様式が考えられる。

1.2 人間の神経の機能：

1) 先づインパルス(刺戟)に対する反応として

a) どこにインパルスが加えられても両方向にそれを伝導する。

b) 全か無かの法則にしたがうインパルスを伝導しなければならない。

c) インパルスの直後にはインパルスを伝導しない

不応期がある。

d) インパルスはひとりで伝播して非減衰でなければならない。

2) 神経中の情報は温度によって異なる速度で伝わる。すなわち生体が温かくなれば信号の速さが増し、神経と脳は興奮してくる。

3) 神経中を情報が伝わる時、情報は信号化(符号化)される。

4) パターンの識別(すなわち、刺戟の空間的、時間的な区別)

5) 電話系では、受信される通信の意味は送信者によってきまるが、感覚系では、意味は受信者によってきまる。

以上で概略、現在迄にわかっている脳と神経の機能を例挙したが、それを如何にして実現させるかを次に考える。

3. 電気回路的モデル

ここで、上記機能を実現させる電気回路モデルとして、1) 南雲氏の能動線路、ニューリスターモデル、2) W.G. ウォルター氏のマシナ・スペクラトリクス及び3) 筆者の一提案を述べる。

3.1) 南雲氏の能動線路(ニューリスターモデル)：

南雲氏はエサキ・ダイオードを用いて次図のような分布線路を作った。その回路構成は図1.の如くである。

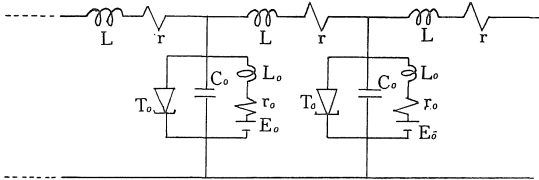


図1 南雲氏の能動線路：ニューリスターモデル
T₀ はエサキ・ダイオードである

この回路の特長としては、

- (a) 回路構成が簡単であること。
- (b) パルス整形作用があり、神経中の情報伝送に対して、符号化作用の一端を示している。
- (c) さらに、中程度の強さの信号に対して一番よく反応を示す。

しかし、なお神経のモデルとしては、インパルスに対する不応期の存在、全か無かのインパルスを伝導するかどうか、又、結合の豊かさといったような特性についてはどうか等々と考えると充分満足すべきものとは云いがたい。南雲氏はこの線路の方程式が双曲型の準線型偏微分方程式(非線型波動方程式)になることを示し、その方程式を数値的に解くことによって数学的モデルとしての検討を試みているがなお充分とはいえない。

その方程式の一般形は、

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f\left(t, x, v, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

である。ここに t は時間、 x は線路の位置、 v は電位、 c は波の伝播の速度である。南雲氏が導いた式は f の形、及びその係数について、なお色々な制約が附加されている。

3.2) ウォルター氏の神経モデルと、考える模型：

ウォルター氏は神経モデルとして図2のようなものを考えた。

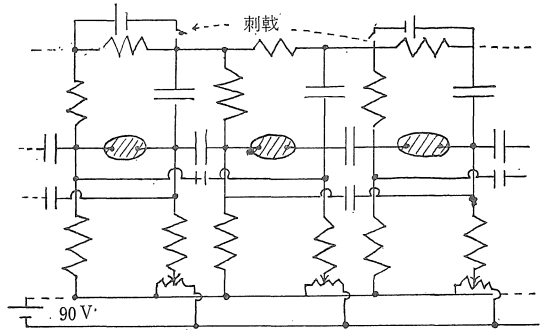


図2 ウォルター氏の神経モデル

このモデルの詳細については省略するが、南雲氏のモデルと大体同じ特長をもっているようである。さらにウォルター氏は考えるモデルとして図3のマシナ・スペクラトリクスを試作している。

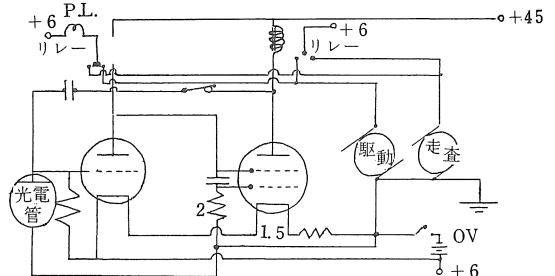


図3 ウォルター氏マシナ・スペクラトリクス

マシナ・スペクラトリクスの特長として次の点をあげている。

(a) 経済性 (Parsimony)：生命のメカニズムにある構造と機能の経済性。今日の動物にはごくわずかの余剰器管しかもっていない、すなわち『改良して間にあわせる』ことは生存競争のスローガンである。

(b) 思索性 (Speculation)：典型的な動物の性質は何か周囲で起るのを消極的に待つのではなく、むしろ環境を自ら探索することである。この点、最も精巧な計算機でも解決すべき問題を自らもとめて、あたりを見まわすというようなことをしない。マシナ・スペクラトリクスは電池を充電しているとき以外はじっとしていない。

(c) 正のトロピズム (positive tropism) : 環境の誘因に対する感受性。中程度の光に向う運動によって示されるように、適当な光のシグナルを受容すると、探索行動が抑制されて、光に向ってむきなおりに近づいてゆく。

(d) 負のトロピズム (negative tropism) : 非常に明かるい変化、障害物、急傾斜には反撥をおこさせる。

(e) 識別 (diserement) : 有効な行動と無効な行動とを区別すること。

(f) 最適点 (optima) : 極大よりは、中程度の最っとも都合のよい状態を求める傾向。すなわちブユリダンのロバのように、全く同じ量のマグサが全く同じ距離においてあったがために、飢え死にするというようなことはない。2つの同じ明るきの光が同じ距離におかれても、マシナ・スペクトリクスは、それらの中間にとどまることなく、まず一方を訪ね、次に他方を訪ねる。

(g) 自己認知 (self-recognition) :

(h) 相互認知 (mutual recognition) :

(i) 内部安定性 (internal stability) :

一言で、マシナ・スペクトリクスの特長を言へば、その精巧化の可能性にあるのではなく、『機能的メカニズムがそれ以上単純化できない』点にある。

以上のように非常に興味あるモデルとして述べているが、実際にはなお不十分な点があると思われるがその点についてはまだ、はっきりしない点が多い。

3.3 筆者の模型

筆者は先づ回路網グラフ的に次の図4を作って考えてみた。

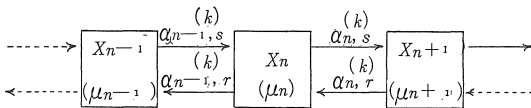


図4 筆者の神経モデルの回路グラフ

この図で x_n としてあるのは神経単位細胞である。それらが相互に矢印で示されたように結合している。ここで、

$\alpha_{n,s}^{(k)} (k=1, \dots, j_{ns})$: は細胞 x_n が細胞 x_{n+1} に及ぼす影響の程度を示すパラメーター。

$\alpha_{n,r}^{(k)} (k=1, \dots, j_{nr})$: は細胞 x_{n+1} が x_n に及ぼす影響の程度を示すパラメーター。

μ_n : は細胞 x_n の変化の程度を中程度にする作用のあるパラメーター。

である。そこで 1) 各細胞は生きていること、それが発振状態にあると考える。 2) 一般的に細胞は相互に隣同志の細胞と影響し合っていること。 3) 細胞、特に脳から出ている脳波は周波数が低いこと。 4) 相互結合の豊かさという点を $\alpha_{n,s}^{(k)}$ 及び $\alpha_{n,r}^{(k)}$ パラメーターでおきかえ

ることが可能である、等々を考慮して次の形の一般の方程式を考えることにした。

$$(I) \quad \ddot{x}_n + w^2 x_n = \mu_n f_n(t, x_{n-1}, \dot{x}_{n-1}, \ddot{x}_{n-1}, x_n, \dot{x}_n, \ddot{x}_n, x_{n+1}, \dot{x}_{n+1}, \ddot{x}_{n+1}, \alpha_{n-1,s}, \alpha_{n-1,r}, \alpha_{n,s}, \alpha_{n,r})$$

$$(II) \quad \dot{x}_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_{nj} x_j + \mu_n F_n(t, x, \dot{x}, \alpha_s, \alpha_r) \quad (n=0, 1, \dots)$$

ただしここで a_{nj} は無限行列で、(II)の線型部分

$$(III) \quad \dot{x}_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_{nj} x_j$$

は振動解をもつと仮定する。又 F_n は t , ベクトル $x, \dot{x}, \alpha_s, \alpha_r$ のスカラー函数とする。

(I)の大きな特長は、第1に、右辺が x_n だけでなく、 x_{n-1}, x_{n+1} , にも関係すること、及び第2に、 $\alpha_{n,s}, \alpha_{n,r}$ なる相互結合の豊かさを示すパラメーター群がついてることである。このパラメーターを具体的に考えれば、発振器の結合部分にコンデンサー、インダクタンス、抵抗、非線型素子などの複ざつな回路で構成されていて、その様式が何らかの原因で適当に変化するものと考えてよい。(II)はそれを一般化した形である。なお、函数 f_n を神経モデルとして使用しようとする場合には、 f_n は次の条件を満足するものとする。

$\alpha_{n,r}^{(k)} \rightarrow \alpha_{n,0(r)}^{(k)}$ のとき、ここで $\alpha_{n,0(r)}^{(k)}$ は環境によって定まるある小さい定数であるとする。

$$\lim_{\alpha_{n-1,r}^{(k)} \rightarrow \alpha_{n-1,0(r)}^{(k)}} f_n(t, x_{n-1}, \dot{x}_{n-1}, x_n, \dot{x}_n, x_{n+1}, \dot{x}_{n+1}, \alpha_{n-1,s}, \alpha_{n-1,r}, \alpha_{n,s}, \alpha_{n,r}) \rightarrow g_n(t, x_{n-1}, \dot{x}_{n-1}, x_n, \dot{x}_n, \alpha_{n-1,s}, \alpha_{n-1,r}, \alpha_{n,s})$$

となる。これは神経細胞は、結合が弱くなると個々独立な単位になってしまうことを意味する。この外 α は単に量的なものを表現しているだけでなく、質的なものも意味していると考えてよい。この質的なものこそ神経の本質であると思われるが、この点については筆者は充分検討していない。そこでこのような微分方程式又は回路についての研究は皆無であるが、著者は先づ図5の如きエサキダイオードによる単純な回路モデルを考えて見た。

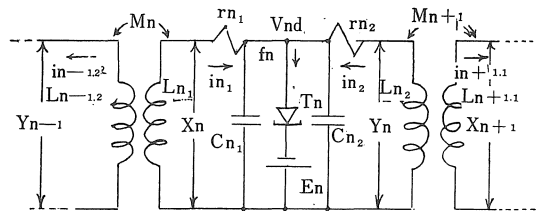


図5 神経の電気回路のモデル、 T_n はエサキ・ダイオードである

又、微分方程式について、これと関連して、Krylov-Bogoluibov 氏の漸近法又はその変形としての平均化法が挙げられると思う。そこで以下ではその概略を筆者の

考えたモデルとの関連において述べる。

4. Krylov-Bogoluibov 氏の漸近法と筆者のモデルとの関係

4.1. Krylov-Bogoluibov 氏の漸近法

先づその準備として次の補助定理を述べる。

補助定理. 1. 次の線型非同次微分方程式:

$$(4.1) \quad \dot{x}_s = a_{s1}x_1 + \dots + a_{sn}x_n + f_s(t); \quad s=1, 2, \dots, n$$

ここで a_{sj} は定数, $f_s(t)$ は周期 w の連続な周期函数である, の解は次の 2 つの場合がある。

(1) 非共振の場合には, 函数 $f_s(t)$ の如何にかかわらず, (4.1) の解は 1 つ, そしてただ 1 つの周期しか持たない。

(2) 共振の場合, すなわち, 特性方程式が零根又は $\pm 2\pi pi/w$, p は整数, の形の根をもつ場合, には (4.1) は函数 $f_s(t)$ が次の条件を満足するときだけに周期解をもつ。

$$(4.2) \quad \int_0^w \sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha}(\tau) \psi_{\alpha i}(\tau) d\tau = 0; \quad i=1, \dots, m$$

ここで $\psi_{s1}(\tau) \dots, \psi_{sm}(\tau)$ ($s=1, \dots, n$) は, adjoint な方程式(4.3)の周期 w の周期解である。

$$(4.3) \quad \dot{y}_s + a_{1s}y_1 + \dots + a_{ns}y_n = 0; \quad s=1, \dots, n$$

そこで, 我々が考える神経モデルも外部の刺戟, すなわちインパルスに対して共振する場合と非共振の場合とが考えられるが, モデルは内部自己安定性なる性質をもつために外部からのインパルスが直接発振器に作用することはないと考えられる。すなわち外部からのインパルスが平均化されるか, あるいは弱められて神経に作用するのである。従って 2 つの場合にわけて取扱い方法を述べる:

(1) 数学的近似として平均化法。これが上に述べた場合で, 外部刺戟はかみとされて発振器に加わる。この方法の正当性を示すものとして脳波が非常に低周波 (2.3 サイクルから 20 サイクル迄) であることがあげられる。

(2) 自励系として振動。これは神経は外部から刺戟が加えられなくても自分自身の活動と生命維持を示すことに対応している。

そこで先づ

(1) 平均化法,

クリロフとボゴリーボフ氏は物理系では次のような特殊な形をした微分方程式がよく現われることを示している:

$$(4.4) \quad \ddot{x}_k + w_k x_k = \mu X_k(t, x_k, \dot{x}_k); \quad k=1, \dots, n$$

この式の従属変数に特殊な変換をほどこすと, 次の形になおすことができる:

$$(4.5) \quad \dot{x}_k = \mu_k X_k(t, x_1, \dots, x_n); \quad k=1, \dots, n$$

X_k は t に関して振動的であるから,

$$(4.6) \quad X_k(t, x_1, \dots, x_n) = \sum e^{i\nu t} X_{\nu}(x_1, \dots, x_n)$$

と仮定する。これをベクトルマトリックス記号を用いて書けば,

$$(4.7) \quad \dot{x} = \mu X(t, x); \quad X(t, x) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} X_{\nu}(t)$$

となる。(4.5)乃至(4.7)は筆者が前に考えた式とは大部異なっているが, 数学的な内容においては大体同一系列に属する方程式とみなしてよい。そこで, その解法を以下に述べる。詳しくは文献を参照されたい。先づベクトルの微分演算の記号を次に定義する: $F(t, x)$ はスカラー t とベクトル x のベクトル値函数とする。

$$(4.8) \quad \frac{d}{dt} F(t, x) = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot F$$

ここで

$$(4.9) \quad \partial F / \partial x = \partial F_k / \partial x_q = \frac{\partial (F_1, \dots, F_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}$$

$$(4.10) \quad \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x} = \sum_{q=1}^n \frac{dx_q}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x_q}$$

$$(4.11) \quad F(t, x) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} F_{\nu}(x)$$

$$(4.12) \quad M_t[F(t, x)] = F_0(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t, x) dt$$

$$(4.13) \quad \bar{F}(t, x) \equiv \sum_{\nu=0} e^{i\nu t} F_{\nu}(x); \quad \bar{F}(t, x) \equiv \sum_{\nu=0} \frac{e^{i\nu t}}{(i\nu)^2} F_{\nu}(x)$$

(4.12) を平均化演算子, (4.13)~を積分演算子と呼ぶ。

これらの式から次の式が得られる。

$$(4.14) \quad \frac{\delta \bar{F}}{\delta t} = \bar{F}, \quad \frac{\delta \bar{F}}{\delta t} = F - M_t[F] = F - F_0$$

さて, (4.7)において, 右辺には μ が掛けてあるから \dot{x} は小さい, すなわち右辺 $X(t, x)$ は非常に早く変化する項 (この項は \dot{x} に影響を当えない) とゆっくり変動する項から成り立っていると考えるとよい。ゆっくり変動する項を ξ とすれば, 第 1 近似として $x = \xi$ とおくと

$$(4.15) \quad \dot{x} = \mu X(t, \xi) = \mu \sum_{\nu} X_{\nu}(\xi) e^{i\nu t}$$

すなわち

$$(4.16) \quad \dot{x} = \mu X_0(\xi) + \text{小さい振動する項}$$

第 2 項を無視すると第 1 近似の微分方程式

$$(4.17) \quad \xi = \mu X_0(\xi) = \mu M_t[X(t, \xi)]$$

が得られる。第 2 近似は小さい振動項: $\mu e^{i\nu t} X_{\nu}(\xi) = \mu P_{\nu}$ を考えて,

$$(4.18) \quad x = \xi + \mu \sum_{\nu} \frac{P_{\nu}}{i\nu} = \xi + \mu \bar{X}(t, \xi)$$

この式を(4.7)に代入すると

$$(4.19) \quad x = \mu X(t, \xi + \mu \bar{X}) = \mu M_t[X(t, \xi + \mu \bar{X})] + \text{小さい振動項}$$

$$(4.20) \quad \xi = \mu M_t[X(t, \xi + \mu \bar{X})] = \mu M_t \left[X(t, \xi) + \mu \left(\bar{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) \right]$$

又, 今求めた諸式を別の仕方で導くことができる。すなわち, (4.18) で ξ も変数であると考えると,

$$(4.21) \quad x = \xi + \mu \frac{\partial \bar{X}}{\partial \xi} \xi + \mu \frac{\partial \bar{X}}{\partial t} \xi; \quad \bar{X} = \bar{X}(t, \xi)$$

積分演算子の性質 $\partial \tilde{X} / \partial t = X(t, \xi) - X_0(\xi)$ を考えて、(4.21) の \dot{x} 、(4.18) の x を (4.7) に代入すると、

$$(4.22) \quad \left(1 + \mu \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi}\right) \dot{\xi} = \mu X_0(\xi) + \mu \left[X(t\xi + \mu \tilde{X}) - \tilde{X}(t, \xi)\right]$$

1 は単位マトリックスである。よって

$$(4.23) \quad \dot{\xi} = \mu \left[1 + \mu \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi}\right]^{-1} X_0(\xi) + \mu \left[1 + \mu \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi}\right]^{-1} [X(t\xi + \mu \tilde{X}) - X(t, \xi)]$$

となる。級数展開；

$$(4.24) \quad \left[1 + \mu \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi}\right]^{-1} = 1 - \mu \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} + \mu^2 \dots$$

を用いると (4.23) は

$$(4.25) \quad \dot{\xi} = d\xi/dt = \mu X_0(\xi) + \mu^2 \dots$$

第1項迄取れば、

$$(4.26) \quad \dot{\xi} = \mu X_0(\xi)$$

その正確な解は

$$(4.27) \quad x = \xi + \mu \tilde{X}(t, \xi)$$

として、前と同じ式が得られる。ここで

$$(4.28) \quad X_0(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \xi) dt$$

である。第2近似を求める為に、

$$(4.29) \quad \dot{\xi} = d\xi/dt = \mu X_0(\xi) + \mu^2 P(\xi) + \mu^3 \dots$$

に返って考える。 x を今次の形で求める。

$$(4.30) \quad x = \Phi(t, \xi, \mu)$$

$$(4.31) \quad \dot{\xi} = \mu X_0(\xi) + \mu^2 P(\xi)$$

$$(4.32) \quad \frac{dx}{dt} = \mu X(t, x)$$

第1近似式 $\dot{\xi} = \mu X_0(\xi)$ から ξ が求まったとして、

$$(4.33) \quad x = \xi + \mu \tilde{X}(t, \xi)$$

は精度が $o(\mu^2)$ である。(4.33) に更に一項附加して

$$(4.34) \quad x = \xi + \mu \tilde{X}(t, \xi) + \mu^2 F(t, \xi);$$

$$F(t, \xi) = \sum_k e^{ikt} F_k(\xi)$$

の形で x を求めよう。途中の計算を省略すると結局次の式から ξ を決定することができる。

$$(4.35) \quad \dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = \mu M_t [X(t, \xi)] + \mu^2 M_t \left\{ \left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \tilde{X}(t, \xi) \right\}$$

又 x は

$$(4.36) \quad x = \xi + \mu \tilde{X}(t, \xi) + \mu^2 \left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) - \mu^2 \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi)$$

から求まる。

この方法の大きな特長は、積分演算子、平均化演算子のような演算子を導入していることである。これによって非線型性(演算子)の作用が中程度のものだけに限られてしまうことになる。この点は猶、脳の機能との間にギャップがあると思われるが研究はまだそこまで進んでいない。

(4.2) 自励系として振動解をもつ場合；自励系として考えた神経の機能は先づ“生きている”ということである。これは又複雑な生命現象で簡単なモデルでは表現できないが、1つの簡単な表現方法としてクリロフーボゴリュポフ氏による漸近法が挙げられる。

ここで考える微分方程式は；

$$(4.37) \quad \dot{x}_s = \sum_{j=1}^n a_{sj} x_j + \mu f_s(x_1, \dots, x_n, \mu) \quad s=1, \dots, n$$

なる形のものである。これは系が自己発振している場合には比較的簡単な状態でありその為線型部分を必要とする、又他の発振器からの影響はある程度弱められて作用するという場合に相当する。そこでこの微分方程式の解法を述べる：先づ(4.37)の generating system：

$$(4.38) \quad \dot{X}_s = \sum_{j=1}^n a_{sj} x_j$$

は m コの同一周期 T の独立な特殊(周期)解をもつと仮定する。この周期解は特性方程式の根 $\pm P_{ji}(2\pi/T)$ ；ここに P_{ji} は整数に対応するものである。この generating system の解は

$$(4.39) \quad x_s^{(0)} = \varphi_s(t) = M_1^* \varphi_{s1} + \dots + M_m^* \varphi_{sm}$$

とする。ここで M_i^* は定数である。今、 $X_s^*(t, \mu)$ を $\mu \rightarrow 0$ のとき $\rightarrow 0$ となるある函数とすれば、(4.37) の一般解は：

$$(4.40) \quad x_s(t) = M_1^* \varphi_{s1} + \dots + M_m^* \varphi_{sm} + X_s^*(t, \mu)$$

となる。自励系では、 M_m^* は必ず0にすることができ。その代り、周波数の修正項が必ず必要となる。

時間 t に変数変換：

$$(4.41) \quad t = \tau(1 + \mu\alpha)$$

をほどこせば、 τ は周期 T (generating system) となる。そこで問題は新変数について周期 T の解を求めることである。

$$(4.42) \quad \dot{x}_s = \sum_{j=1}^n a_{sj} x_j + \mu(1 + \mu\alpha) f_s(x_1, \dots, x_n; \mu) + \mu\alpha \sum_{j=1}^n a_{sj} x_j$$

ここで $\mu=0$ のとき $\alpha = \alpha^*$ とする。 $M_1^*, \dots, M_m^*, \alpha^*$ は次式を満足する：

$$(4.43) \quad \int_0^T \sum_{\beta=1}^n f_{\beta}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \Psi_{\beta i} dt + \alpha^* (A_{i1} M_1^* + \dots + A_{i, m-1} M_{m-1}^*) = P_i(\alpha^*, M_1^*,$$

$$(4.44) \quad \dots M_{m-1}^*) = 0; \quad i=1, \dots, m$$

ここで $\Psi_{sj}(t)$ は、generating system (4.39) の adjoint system の解。 A_{ij} は

$$(4.45) \quad A_{ij} = T \int_0^T \frac{d\varphi_{\beta j}}{dt} \cdot \Psi_{\beta i}$$

から求まる。(4.45) の証明は省略。周期解を求めるには、(4.42) を0次近似として、 k 次近似を

$$(4.46) \quad x_s^{(k)} = \sum_{j=1}^n a_{sj}^{(k)} x_j + \mu(1 + \alpha^{(k)} \mu) f_s(x_1^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}, \mu) + \mu\alpha^{(k)} \sum_{j=1}^n a_{sj} x_j^{(k-1)}$$

から求めればよい。

今、函数 f_s が x_i の解析函数であるとすれば周期解は級数の形に展開できる：

$$(4.47) \quad x_s(\tau) = \varphi_s(\tau) + \mu x_s^{(1)}(\tau) + \mu^2 x_s^{(2)}(\tau) + \dots \\ = M_1^* \varphi_{s1}(\tau) + \dots + M_{m-1}^* \varphi_{s,m-1}(\tau) \\ + \mu x_s^{(1)}(\tau) + \mu^2 x_s^{(2)}(\tau) + \dots$$

函数 $x_s^{(1)}$ は次の方程式を満足する。

$$(4.48) \quad \dot{x}_s^{(1)} = \sum_{j=1}^n a_s j x_j^{(1)} + f_s(\varphi_1, \dots, \varphi_s; 0) \\ + \alpha^*(a_{s1}\varphi_1 + \dots + a_{sn}\varphi_n)$$

又、周期性である為には、

$$(4.49) \quad \int_0^T \sum_{\beta=1}^n f_{\beta}(\varphi_1, \dots, \varphi_n; 0) \Psi_{\beta i} d\tau + \alpha^* \\ (A_{i1} M_1^* + \dots + A_{in} M_n^*) \\ = P_i(\alpha^*, M_1^*, \dots, M_{m-1}^* = 0; i=1, \dots, m)$$

を満足しなければならない。さらにもし

$$(4.50) \quad \frac{\partial(P_1, \dots, P_m)}{\partial(\alpha^*, M_1^*, \dots, M_{m-1}^*)} \neq 0$$

ならば、 $x_s^{(1)}$ は

$$(4.51) \quad x_s^{(1)}(\tau) = x_s^{(1)*}(\tau) \cdot M_1^{(1)} \varphi_{s1}(\tau) + \dots \\ + M_{m-1}^{(1)} \varphi_{s,m-1}(\tau)$$

と書くことができる。

このようにして順次近似度を高めてゆくことができるが、以上のモデルは最初にも述べたように筆者の提案した微分方程式を解くためにはなお不十分である。そこで次に考えられる方法としては函数解析によるルベック積分を一般化したような近似法が考えられるが、なお疑問の点があり未だ完成されたものではないのでここでは割愛する。

5. 筆者の電気回路的モデルとその微分方程式

筆者は前に述べた回路グラフを電気回路で具体的に置き換えたものとして前にあげた図5を考へて見た。

この回路で $T(-\square-)$ はエサキ・ダイオードである。南雲氏のモデルと著しく異なる点は結合の部分にある。すなわちここでは単に相互誘導で結合しているにすぎないが、それでも結合係数 $k_n = M_n / \sqrt{L_1 L_2}$ を適当に変えれば相当色々な周波数及び振巾の発振様式がえられると思われる。さらにダイオードのバイアス条件によって又色々興味ある複雑な現象が見られるのではないだろうか。次にこの一般的な回路を数式化してみる。

図5の回路網グラフは図6のようになる。キルヒホッフの法則より第 n 番目の発振器について、

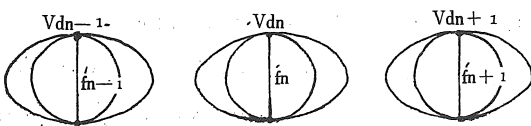


図6 回路網グラフ

$$(5.1) \quad i_{n1} + i_{n2} = f_n(v_{dn} + E_n) + (C_{n1} + C_{n2}) \cdot \frac{dv_{dn}}{dt}$$

$$(5.2) \quad -v_{dn} = L_{n1} \cdot \frac{di_{n1}}{dt} + r_{n1} i_{n1} \pm M_n \cdot \frac{di_{n-1,2}}{dt}$$

$$(5.3) \quad -v_{dn} = L_{n2} \cdot \frac{di_{n2}}{dt} + r_{n2} i_{n2} \pm M_{n+1} \cdot \frac{di_{n+1,1}}{dt} \\ n=1, 2, \dots$$

が成立する。ただし、

$$(5.4) \quad M_1 = 0$$

ここでパラメーターについて次のようにおく：

$$(5.5) \quad \begin{cases} C_n \equiv C_{n1} + C_{n2} ; & L_n \equiv \frac{L_{n1} L_{n2}}{L_{n1} + L_{n2}} \\ w_n^2 \equiv 1/C_n L_n ; & w_n t \equiv \tau \\ df_n(x)/dx \equiv g_n \end{cases}$$

とすると、途中の計算は省略して、結局次の式が得られる。

$$(5.6) \quad \frac{d^2 v_{dn}}{d\tau^2} + v_{dn} = -\sqrt{\frac{L_n}{C_n}} g(v_{dn} + E_n) \frac{dv_{dn}}{d\tau} \\ - \frac{L_n}{L_{n1}} r_{n1} i_{n1} - \frac{L_n}{L_{n2}} r_{n2} i_{n2} \\ - \frac{L_n}{L_{n1}} x_{n1} - \frac{L_n}{L_{n2}} x_{n2}$$

ここで

$$(5.7) \quad \begin{cases} x_{n1} \equiv \pm M_n (i_{n-1,2} / dt) \\ x_{n2} \equiv \pm M_{n+1} (i_{n+1,1} / dt) \end{cases}$$

である。今抵抗分は非常に小さいと仮定する。又結合は相隣れるもの同志の間でのみ起り1つ以上離れた発振器の間での結合を無視する、すなわち式で書けば次の仮定をおく：

$$(5.8) \quad \begin{cases} -\frac{L}{L_1} r_1 i_1 \approx 0; & -\frac{L}{L_2} r_2 i_2 \approx 0, \\ M_i M_j \times x \approx 0, & i \neq j \end{cases}$$

ここで x は任意の変数とする。そうすると近似的に次の式が導かれる。

$$(5.9) \quad \frac{d^2 v_{dn}}{d\tau^2} + v_{dn} = -\sqrt{\frac{L_n}{C_n}} g_n(v_{dn} + E_n) \cdot \frac{dv_{dn}}{d\tau} + \frac{\pm L_n M_n}{L_{n1} L_{n-1,2} w_{n-1}} v_{dn-1} \\ + \frac{\pm L_n M_{n+1}}{L_{n2} L_{n+1,1} w_{n+1}} v_{dn+1}$$

さらに次のように仮定する。第1に、各発振器は大体特性が一致している。第2に自己インダクタンス、及び相互インダクタンスは容量にくらべて小さく次のようにおくことができる。

$$(5.10) \quad L_n \equiv \mu^2 L_n' \quad M_n \equiv \mu^3 M_n'$$

さらに記号を次のように書きかえる：

$$(5.11) \quad \begin{cases} v_{dn} = x_n; & dv_{dn}/d\tau = \dot{x}_n ; \\ M_n' = \alpha_n \end{cases}$$

(5.9) 式は

$$(5.12) \quad \ddot{x}_n + x_n = \mu f(\dot{x}_n, x_{n-1}, x_{n+1}, \alpha_{n-1}, \alpha_{n+1})$$

ここで

$$(5.13) \quad f(x_n, x_{n-1}, x_{n+1}, \alpha_{n-1}, \alpha_{n+1}) \\ = -\sqrt{\frac{L_n}{C_n}} g(x_n + E_n) \dot{x}_n \pm \sqrt{\frac{C_n}{L_n}} \alpha_{n-1} x_{n-1} \\ \pm \sqrt{\frac{C_n}{L_n}} \alpha_{n+1} x_{n+1}$$

で、前に3.3節で述べた式と一致する。この例でもわかるように、神経モデルを考える場合には回路パラメータに色々な仮定をおかなければ要求されるような特性をもったものが得られないことである。なお上式を平均化法によって解いているがなお検討すべき点が多いので今回の報告では割愛させていただく。

6. 結 言

この論文では、はじめに脳の機能について概説し、次に現在迄に提案され試作された神経と脳のモデル、特に

ウォルター氏のマシナ・スペクトラトックスにつて詳しく説明した。そして筆者の提案したモデルの数学的意味及びその解法について述べた。最後に具体的な電気回路についてその微分方程式を導いた。この論文が将来この方面の研究に何にかお役に立てば、誠に幸いである。終りに本学電子工学科竹松英夫教授に日頃の御援助を深謝する。

参 考 文 献

- 1) W.G. ウォルター著：「生きている脳」1953
- 2) N. Minorsky：「Nonlinear oscillation」1962
- 3) S. Lefschetz：「Differential equation, geometric Theory」1962