終点換算法とその応用

永谷　彬

Method of end point conversion and its applications

Hitoshi NAGAYA

We introduce method of end point conversion. Combining this method with the methods of middle point conversion and initial point conversion, we give some applications of them.

序　文

本研究報告Ａ・前号（No.19）における11頁〜20頁の小論[1)]を[T]で表わすことにする。

[T]では，§１において標準ガウス分布の一つの応用であり，かつまた一つの換算法であるところの偏差値の解説とそれに関する私見を述べた。§２では折れ線換算法（method of broken line conversion）の導入とその応用について論じ，§３では中点換算法（method of middle point conversion），そして§４では始点換算法（method of initial point conversion）のそれぞれの導入とその応用について論じた。

小論では，§１で終点換算法（method of end point conversion）の導入とその応用について論ずる。

一方，[T]におけるその一部分の改更を表1として§２に記す。

また§３では，中点換算法・始点換算法・終点換算法の三種類の換算法の応用として，[T]§３応用２と類似の問題について論ずる。

“統計”の名の下で行われ易い“ウソをつく”[2)]ことを防ぐために役立てば幸いである。

§１　終点換算法

x：小数部分が有限の数で，符号の正負を問わない。このようなxを有限個扱うことにする。

$f(x)$：xの個数。

$\sum_x f(x)=\mathrm{N}$：着目しているxの総個数。

$\mathrm{I}_j=(a_{j-1},\ a_j]=\{t\,|\,a_{j-1}<t\leqq a_j\}$とする。ただし，$a_j=a_{j-1}+c$，$c>0$，$1\leqq j\leqq r$　とする。

$\widehat{x}$：　$x\in\mathrm{I}_j$ のとき，$\widehat{x}=a_j$ とする。即ち，xが属する区間I_jの終点を表わす。

$\widehat{\mathrm{E}}$：$\widehat{x}$の算術平均。

E：xの算術平均。このEをxの**単純平均**ということにする。

定理　上の記号の下で，次が成立する：

$$0\leqq\widehat{\mathrm{E}}-\mathrm{E}<c,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\widehat{\mathrm{E}},\mathrm{E})$$
$$\mathrm{E}\leqq\widehat{\mathrm{E}}<\mathrm{E}+c,$$
$$\widehat{\mathrm{E}}-c<\mathrm{E}\leqq\widehat{\mathrm{E}}.$$

即ち，Eは$\widehat{\mathrm{E}}-c$より大，かつ$\widehat{\mathrm{E}}$以下であり，$\widehat{\mathrm{E}}$とEの違いはc未満である。

（証明）　$\widehat{x}$の定義により

$$0\leqq\widehat{x}-x<c.$$
$$\therefore\quad 0\leqq\sum_x f(x)(\widehat{x}-x)<c\sum_x f(x)=c\mathrm{N},$$
$$\therefore\quad 0\leqq(\sum_x fx)(\widehat{x}-x))/\mathrm{N}<c,$$

即ち，$(\widehat{\mathrm{E}},\mathrm{E})$を得る。　（了）

定義　φ：$x\longmapsto\widehat{x}$ は単調増加函数であるから，一つの換算である。このφによる換算法を**終点換算法**ということにする。

応用　切り上げ法

小数部分が有限の数を有限個扱うことにする。xの小数点以下第k位，$k\geqq1$，の数およびそれより右側にある端数を切り捨てて，さらに小数点以下第（$k-1$）位の数字に１を加えて得られる数値の算術平均を$\widehat{\mathrm{E}}_{-k}$とすれば，

$$0\leqq\widehat{\mathrm{E}}_{-k}-\mathrm{E}<10^{-(k-1)},\quad k\geqq1$$

となる。

一方，整数部分の第10^k位，$k\geqq0$，以下の整数部分（$\neq0$）をすべて０で書き直し，さらに第10^{k+1}位の数字に１を加えて出来た整数値の算術平均を$\widehat{\mathrm{E}}_k$で表わせば，

$$0\leqq\widehat{\mathrm{E}}_k-\mathrm{E}<10^{k+1},\quad k\geqq0,$$

となる。

共に式$(\widehat{\mathrm{E}},\mathrm{E})$より得られることは見易い。

§２　[T]の改更

P.11　R↑30：11頁の右の列の下から30行目を表わす。

P.16　L↓8：16頁の左の列の上から8行目を表わす。

表1

訂正又は補充すべき［T］の部分	改　　　更　　　分
P.11 R↑30　$f_1(\mathrm{I}_1)=\{f(x)\mid x\in \mathrm{I}_1\}$	$f_1(x_1)=\{f_1(x)\mid x\in \mathrm{I}_1\}$
P.12 R↑6～↑1 のグラフを，横軸方向にμだけ平行移動した上で，さらに横軸方向にσ倍し，かつ縦軸方向を$1/\sigma$倍して得られる（図甲)。またN(μ,σ^2)の分布函数G$(a;\mu,\sigma^2)$のグラフは，N(0，1)の分布函数$\Phi(x)$のグラフを横軸方向にμだけ平行移動した上で，さらに横軸方向にσ倍して得られる。	のグラフを，横軸方向にσ倍し，かつ縦軸方向を$1/\sigma$倍してから，さらに横軸方向にμだけ平行移動して得られる（図甲)。またN（μ，σ^2）の分布函数$G(a;\mu,\sigma^2)$のグラフは，N(0，1)の分布函数$\Phi(x)$のグラフを横軸方向にσ倍し，さらに横軸方向にμだけ平行移動して得られる。
P.13 L↑21 $\mathrm{erf}\ x=\mathrm{erfc}\ x=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$	$\mathrm{erf}\ x=1-\mathrm{erfc}\ x=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$
P.16　L↓8，L↓9，R↑17 関数	函　　　数
P.20　R↓16　違いはcを越えない。	違いはc未満である。
R↓30　$0<\mathrm{E}-\tilde{\mathrm{E}}_k<10^{k+1}$，$k\geqq 0$	$0\leqq \mathrm{E}-\tilde{\mathrm{E}}_k<10^{k+1}$，$k\geqq 0$
R↑8　出版会。	出版会。昭和56年。
R↑6　伊国屋書店。	伊国屋書店。昭和56年。
R↑4　東洋経済新報社。	東洋経済新報社。昭和55年。
R↑2　講談社。	講談社。昭和59年，第31刷。

§3　三種類の換算法の応用

ある企業における従業員の某月の家計に関するアンケートの結果の一部を表2.1～表2.3のようにまとめた。

x：単位は万円で，0または黒字または赤字の金額の数値とする。

黒字の場合は正の値，赤字の場合は負の値で表わす。

$f(x)$：xに対応する人数。

$\sum_x f(x)=\mathrm{N}$：即ち，総人数。

$\bar{\bar{f}}(j-1,\ j,\ x)$：開区間$(j-1,\ j)$に属する各$x$の人数，即ち$j-1<x<j$　をみたすxの人数を表わす。

$\bar{f}(j-1,\ j)$を次で定義する。

$$\bar{f}(j-1,\ j)=\sum_{j-1<x<j}\bar{\bar{f}}(j-1,\ j,\ x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(f)$$

即ち，開区間（$j-1$，j）に属するx全体に対応する人数の和を表わす。

E：金額の数値xの単純平均。

*E：金額の数値xの表2.1による算術平均。即ち，中点換算法を修正した換算による換算値の算術平均（[T] §3応用2）。

$\tilde{\mathrm{E}}$：金額の数値xに対して表2.2を利用したときの算術平均，即ち，始点換算法による換算値の算術平均

$\hat{\mathrm{E}}$：金額の数値xに対して表2.3を利用したときの算術平均，即ち，終点換算法による換算値の算術平均。

応用　1　次の問題は[T] §3応用2に呼応するものである。

問題(P)　上の記号の下で，*E，$\tilde{\mathrm{E}}$または$\hat{\mathrm{E}}$により，Eのことがどの程度分かるか？

黒字の人，赤字の人がそれぞれ少なくとも1人は居る。

このアンダーラインの部分が満たされているものとして論ずる。

$$\mathrm{N}=\sum_x f(x)=\sum_j (f(j-1)+\bar{f}(j-1,j))\ \cdots\cdots\cdots(\mathrm{N})$$

$$\mathrm{EN}=\sum_j((j-1)f(j-1)+\sum_{j-1<x<j}x\,\bar{\bar{f}}(j-1,j,x)).$$

$${}^*\mathrm{EN}=\sum_j(j-0.5)(f(j-1)+\bar{f}(j-1,j)).$$

$$\tilde{\mathrm{E}}\mathrm{N}=\sum_j(j-1)(f(j-1)+\bar{f}(j-1,\ j)).$$

$$\hat{\mathrm{E}}\mathrm{N}=\sum_j((j-1)f(j-1)+j\bar{f}(j-1,\ j)).$$

しかるに，

$$j-1<x<j \Leftrightarrow -0.5<j-0.5-x<0.5$$

	金額または その区間	人　　数	中　　点	始　　点	終　　点
黒	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	j	$f(j)$	$\cdots j+0.5\cdots$	$\cdots j\cdots$	$\cdots j\cdots$
	$j-1<x<j$	$\bar{f}(j-1,j)$	$\cdots j-0.5\cdots$	$\cdots j-1\cdots$	
	$j-1$	$f(j-1)$			$\cdots j-1\cdots$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	2	$f(2)$			$\cdots 2\cdots$
字	$1<x<2$	$\bar{f}(1,2)$	$\cdots 1.5\cdots$	$\cdots 1\cdots$	
	1	$f(1)$			$\cdots 1\cdots$
	$0<x<1$	$\bar{f}(0,1)$	$\cdots 0.5\cdots$	$\cdots 0\cdots$	
	0	$f(0)$			$\cdots 0\cdots$
	$-1<x<0$	$\bar{f}(-1,0)$	$\cdots -0.5\cdots$	$\cdots -1\cdots$	
赤	-1	$f(-1)$			$\cdots -1\cdots$
	$-2<x<-1$	$\bar{f}(-2,-1)$	$\cdots -1.5\cdots$	$\cdots -2\cdots$	
	-2	$f(-2)$			$\cdots -2\cdots$
	$-3<x<-2$	$\bar{f}(-2,-3)$	$\cdots -2.5\cdots$	$\cdots -3\cdots$	
	-3	$f(-3)$			$\cdots -3\cdots$
字	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
			表2.1	表2.2	表2.3

ゆえに，式(f)を用いれば，次を得る。：

$$-0.5\times\sum_j\sum_{j-1<x<j}\bar{\bar{f}}(j-1,\ j,\ x)$$
$$<\sum_j\sum_{j-1<x<j}(j-0.5-x)\bar{f}(j-1,\ j)$$
$$<0.5\times\sum_j\sum_{j-1<x<j}\bar{\bar{f}}(j-1,j,x),$$

ゆえに式(f)と式(N)により，

$$-0.5\mathrm{N}<\sum_j\sum_{j-1\leqq x<j}(j-0.5-x)\bar{f}(j-1,j)<0.5\mathrm{N},$$

i.e.　$-0.5<{}^*\mathrm{E}-\mathrm{E}<0.5,$

i.e.　$\mathrm{E}-0.5<{}^*\mathrm{E}<\mathrm{E}+0.5,$

i.e.　${}^*\mathrm{E}-0.5<\mathrm{E}<{}^*\mathrm{E}+0.5$ ……………(*E)

これ等は，[T] § 3応用2の解答を再確認したことになる。

同様にして，次を得る：

$-1<\tilde{\mathrm{E}}-\mathrm{E}\leqq 0,$

$\mathrm{E}-1<\tilde{\mathrm{E}}\leqq\mathrm{E},$

$\tilde{\mathrm{E}}\leqq\mathrm{E}<\tilde{\mathrm{E}}+1.$ ……………………………($\tilde{\mathrm{E}}$)

同様にして，次を得る。しかし，これは§ 1の定理において$c=1$の場合であることに着目すれば，直ちに得られる。：

$0\leqq\widehat{\mathrm{E}}-\mathrm{E}<1,$

$\mathrm{E}\leqq\widehat{\mathrm{E}}<\mathrm{E}+1,$

$\widehat{\mathrm{E}}-1<\mathrm{E}\leqq\widehat{\mathrm{E}}.$ ………………………($\widehat{\mathrm{E}}$)

また*E，$\tilde{\mathrm{E}}$および$\widehat{\mathrm{E}}$の定義により次を得る：

$-0.5<{}^*\mathrm{E}-\tilde{\mathrm{E}}\leqq 0.5$ ……………………(*，～)

$-0.5<\widehat{\mathrm{E}}-{}^*\mathrm{E}\leqq 0.5$ ……………………(∧，*)

$0\leqq\widehat{\mathrm{E}}-\tilde{\mathrm{E}}\leqq 1$ ……………………(∧，～)

以上のことから，問題(P)に答えることが出来る。

(P)の解答　*E，$\tilde{\mathrm{E}}$または$\widehat{\mathrm{E}}$により，E のことが，それぞれ式(*E)，式($\tilde{\mathrm{E}}$)または式($\widehat{\mathrm{E}}$)の程度に分かる。

応用　2

(1)　*E，$\tilde{\mathrm{E}}$ および$\widehat{\mathrm{E}}$の相互の関係は式(*，～)，式

(∧, ∗)および式(∧, ～)の程度に分かる。

(2) 経営者の中には$\widehat{\mathrm{E}}$を好む人達がいるかも知れない。一方，従業員側の中には$\tilde{\mathrm{E}}$を好む人達がいるかも知れない。前者と後者が同時にそれぞれ$\widehat{\mathrm{E}}$と$\tilde{\mathrm{E}}$を利用したとき，双方の金額の違いは式(∧, ～)の程度である。即ち，その違いは，1万円以下である。

追記

校正刷を閲読して，種々注意を寄せられた同僚の橋本有司氏に感謝の意を表する。

参考文献

(1) 永谷彬：偏差値，折れ線換算法および算術平均。愛知工業大学研究報告A，No.19，p.p.11—20，1984。

(2) ダレル・ハフ：統計でウソをつく法（高木秀玄訳）ブルーバックス。B120 講談社，昭和58年，第1版第31刷。

（昭和60年1月30日受理）

（昭和60年6月4日修正）