愛知工業大学研究報告
第３３号Ａ　平成10年

被積分関数の滑らかさによる数値積分公式の誤差の評価について
On the error estimations of numerical integrations corresponding to the smoothness of integrands

稲山久也[*]　　樋口功[†]

Hisaya INAYAMA　　Isao HIGUCHI

Abstract

By the wide use of personal computers , the practical value of numerical integration methods are recognized again. In this paper, we consider the classical and famous integration formulas and shall give the error estimations corresponding to the smoothness of integrands.

1. 序

原始関数が容易には求められない関数の近似積分公式として, 区分求積法, 中点法, 台形法, シンプソン法が古くから知られている。　昨今のパソコンの普及により, これらの有効性と実用性が見直されている。

一般に数値解析の書物に記載されている近似積分公式の誤差は, 分割数を n とすると, 区分求積法で $O(\frac{1}{n})$, 中点法および台形法で $O(\frac{1}{n^2})$ であり, 分割数を $2n$ とすると, シンプソン法で $O(\frac{1}{n^4})$ となっている。

被積分関数が十分滑らかである場合, 被積分関数は必要な次数までテーラー展開出来ることからそれらの評価式が導かれるが, 滑らかさが少ない場合は, 低次のテーラー展開しか出来ぬため, その滑らかさに応じて誤差に変化が生じることが分かったので, 以下に報告する。

*情報通信工学科
†自然科学教室

2. 区分求積法の誤差

関数 $f(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続であるとする。 $[a,b]$ を n 等分して，その分点を順に

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

とし，区間の幅を

$$h = \frac{b-a}{n}$$

とする。

$$L_n = f(x_O)h + f(x_1)h + \cdots + f(x_{n-1})h = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})h$$

と置くと，$f(x)$ の一様連続性から，

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \int_a^b f(x)dx$$

が成り立つ。

このように，長方形の面積の和 L_n の極限として定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を求める方法が区分求積法 (**measuration by parts**) である。

連続関数 f(x) に関する分割数 n のときの区分求積法の誤差を E_n とする。 すなはち

$$E_n = E_n(f) = \int_a^b f(x)dx - L_n$$

と置く。

次の定理が示す通り，区分求積法の誤差は，関数の滑らかさに依存しない。

定理 1. 任意の $k \geq 1$ に対し，

$$f(x) \in C^k[a,b]$$

であればいつでも

$$E_n(f) = O(\frac{1}{n})$$

が成り立つ。

証明は，$f(x)$ に平均値の定理を使って簡単に得られる。

注意 1. $f(x)$ が $[a,b]$ 上でリプシッツ連続であれば，やはり $E_n(f) = 0(\frac{1}{n})$ が成り立つ。 $f(x)$ が単に連続である場合の誤差の評価式を筆者等は知らない。

3. 中点法の誤差

区間 $[a,b]$ を n 等分して, 分点を $x_i = a + i(b-a)/n \quad (i = 0, \cdots, n)$ 　分割幅を $h = (b-a)/n$ とする。

$$M_n = M_n(f) = f(\frac{x_o + x_1}{2})h + f(\frac{x_1 + x_2}{2})h + \cdots + f(\frac{x_{n-1} + x_n}{2})h = \sum_{i=1}^{n} f(\frac{x_{i-1} + x_i}{2})h$$

と置き　M_n　を積分　$\int_a^b f(x)dx$　の近似値とする方法を 中点法 **(midpoit rule)** と言う。

中点法に関しても, 任意の連続関数 $f(x)$ に対し, 次の等式が成り立つ。

$$\lim_{n \to \infty} M_n = \int_a^b f(x)dx$$

連続関数 $f(x)$ に関する, 分割数が n のときの中点法の誤差を $E_{M,n}$ とする。すなはち

$$E_{M,n} = E_{M,n}(f) = \int_a^b f(x)dx - M_n$$

と置く。

次の定理が示す通り, 中点法による誤差の評価は, $f(x)$ が C^1 級である場合と C^2 級以上である場合とで, 差が生じる。

定理 2.　$f(x) \in C^k[a,b]$ とする。

(1)　$k = 1$ ならば　$E_{M,n} = E_{M,n}(f) = O(\frac{1}{n})$,

(2)　$k \geq 2$ ならば　$E_{M,n} = E_{M,n}(f) = O(\frac{1}{n^2})$

である。

証明.　第 i 番目の区間 $[x_{i-1}, x_i]$ における誤差を $E^i_{M,n}$ と書き, $F(x) = \int f(x)dx$ と置く。

(1) $k = 1$ のとき。　平均値の定理より, 次式を満たす $c_i, d_i \in (x_{i-1}, x_i)$ が存在する。

$$\begin{aligned}
E^i_{M,n} &= \textstyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})h \\
&= F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(\tfrac{x_{i-1}+x_i}{2})h \\
&= f(x_{i-1})h + \tfrac{1}{2!}f'(c_i)h^2 - \{f(x_{i-1}) + f'(d_i)\tfrac{h}{2}\}h \\
&= \tfrac{h^2}{2}\{f'(c_i) - f'(d_i)\}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

関数 $f'(x)$ は連続だから, $|f'(x)|$ の最大値を C と置くと,

$$E_{M,n} = \sum_{i=1}^{n} E_{M,n}^{i}$$

よって (3.1) より

$$\begin{aligned}|E_{M,n}| &\leq \tfrac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{n}|f'(c_i) - f'(d_i)| \\ &\leq \tfrac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{n}(C + C) \\ &\leq Ch^2 n \\ &\leq \tfrac{(b-a)^2}{n}C\end{aligned}$$

従って $f(x) \in C^1[a,b]$ ならば,　$E_{M,n} = O(\frac{1}{n})$ が成り立つ。

(2) $k \geq 2$ のとき。　平均値の定理および (3.1) より, 次式を満たす e_i が (c_i, d_i) または (d_i, c_i) 内に存在する。

$$\begin{aligned}E_{M,n}^{i} &= \tfrac{h^2}{2}\{f'(c_i) - f'(d_i)\} \\ &= \tfrac{h^2}{2}f''(e_i)(c_i - d_i)\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}|E_{M,n}| &= \tfrac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{n}|f''(e_i)(c_i - d_i)| \\ &\leq \tfrac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{n} Dh \\ &\leq \tfrac{h^3}{2}nD = \tfrac{(b-a)^3}{2n^2}D\end{aligned}$$

ここで, $D = \max|f''(x)|$ である。
従って $f(x) \in C^k[a,b]$ $(k \geq 2)$ であれば $E_{M,n} = 0(\frac{1}{n^2})$ となることが示された。

4. 台形法の誤差

区間 $[a, b]$ を n 等分して, 分点を　$x_i = a + i(b-a)/n \ (i = 0, 1, \cdots, n)$, 分割幅を $h = (b-a)/n$ とする。

$$T_n = T_n(f) = \frac{h}{2}[\{f(x_o) + f(x_1)\} + \{(f(x_1) + f(x_2)\} + \cdots + \{f(x_{n-1}) + f(x_n)\}$$
$$= \tfrac{h}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\{f(x_{n-1}) + f(x_n)\}$$

と置き, T_n を積分　$\int_a^b f(x)dx$　の近似値とする方法を **台形法 (trapezoid rule)** と言う。

台形法に関しても, 任意の連続関数 $f(x)$ に対し, 次の等式が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} T_n(f) = \int_a^b f(x)dx$$

連続関数 $f(x)$ に関する, 分割数が n のときの台形法の誤差を $E_{T,n}$ とする。すなはち

$$E_{T,n} = E_{T,n}(f) = \int_a^b f(x)dx - T_n$$

と置く。

台形法による誤差の評価は, 中点法と同様で, $f(x)$ が C^1 級である場合と C^2 級以上である場合とで, 差が生じる。　すなはち次の定理が得られる。

定理 3. $f(x) \in C^k[a, b]$　とする。このとき

(1) $k = 1$　ならば　$E_{T,n} = E_{T,n}(f) = 0(\frac{1}{n})$,

(2) $k \geq 2$　ならば　$E_{T,n} = E_{T,n}(f) = 0(\frac{1}{n^2})$

である。

証明.　第 i 番目の区間における誤差を $E_{T,n}^i$ と書く。　また $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とする。

(1) $k = 1$　のとき。　$f(x) \in C^1$　, $F(x) \in C^2$　だから, 平均値の定理およびテイラーの定理より,　次式を満たす　$c_i, d_i \in (x_{i-1}, x_i)$　が存在する。

(4.1)　$E_{T,n}^i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{h}{2}\{f(x_{i-1}) + f(x_i)\}$

$$= F(x_i) - F(x_{i-1}) - \tfrac{h}{2}\{f(x_{i-1}) + f(x_i)\}$$

$$= F'(x_{x-1})(x_i - x_{i-1}) + \tfrac{1}{2!}F''(c_i)(x_i - x_{i-1})^2$$

$$-\frac{h}{2}\{f(x_{i-1}) + f(x_{i-1}) + f'(d_i)(x_i - x_{i-1})\}$$

$$= f(x_{i-1})h + \tfrac{h^2}{2}f'(c_i) - \tfrac{h}{2}\{2f(x_{i-1}) + f'(d_i)h\}$$

$$= \tfrac{h^2}{2}\{f'(c_i) - f'(d_i)\}$$

関数 $f'(x)$ は連続だから，$M = \max|f'(x)|$ とおくと, (4.1) より

$$|E_{T,n}| = |\textstyle\sum_{i=1}^{n} E_{T,n}^{i}|$$

$$\le \tfrac{h^2}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{n}|f'(c_i) - f'(d_i)|$$

$$\le \tfrac{h^2}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(M + M)$$

$$\le Mh^2 n = M(b-a)^2\tfrac{1}{n}$$

従って $f(x) \in C^1[a,b]$ ならば，$E_{T,n} = O(\frac{1}{n})$ が成り立つ。

(2) $k \ge 2$ のとき。 $F(x)$ に関する 3 次のテーラー展開から， 次式を満たす $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ が存在する。

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \tfrac{1}{2!}F''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})^2 + \tfrac{1}{3!}F'''(c_i)(x_i - x_{i-1})^3$$

$$= f(x_{i-1})h + \tfrac{1}{2}f'(x_{i-1})h^2 + \tfrac{1}{3!}f''(c_i)h^3$$

$f(x)$ に関する 2 次のテーラー展開から， 次式を満たす $d_i \in (x_i, x_{i-1})$ が存在する。

$$f(x_i) = f(x_{i-1}) + f'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \tfrac{1}{2!}f''d_i)(x_i - x_{i-1})^2$$

$$= f(x_{i-1}) + f'(x_{i-1})h + \tfrac{1}{2!}f''(d_i)h^2$$

ゆえに

$$E^i_{T,n} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{h}{2}\{f(x_{i-1}) + f(x_i)\}$$

$$= F(x_i) - F(x_{i-1}) - \frac{h}{2}\{f(x_i) + f(x_{i-1})\}$$

$$= f(x_i) + \frac{1}{2}f'(x_{i-1})h^2 + \frac{1}{3!}f''(c_i)h^2$$

$$-\frac{h}{2}\{f(x_{i-1} + f(x_{i-1}) + f'(x_{i-1})h + \frac{h^2}{2}f''(d_i)\}$$

$$= \frac{1}{6}f''(c_i)h^3 - \frac{1}{4}f''(d_i)h^3$$

関数 $f''(x)$ は連続だから，$K = \max|f''(x)|$ と置くと，　全体の誤差は

$$|E_{T,n}| = |\sum_{i=1}^n E^i_{T,n}|$$

$$= h^3|\sum_{i=1}^n\{\frac{1}{6}f''(c_i) - \frac{1}{4}f''(d_i)\}|$$

$$\leq h^3|\sum_{i=1}^n(\frac{1}{6}K + \frac{1}{4}K)|$$

$$= \frac{5}{12}Kh^3 \times n$$

$$= \frac{5}{12}K(b-a)^3\frac{1}{n^2}$$

と評価され，　$f(x) \in C^k$ $(k \geq 2)$ ならば，$E_{T,n} = O(\frac{1}{n^2})$ であることが示された。

5. シンプソン法の誤差

区間 $[a,b]$ を $2n$ 等分して, 分点を $x_i = a + i(b-a)/(2n)$ $(i = 0,\cdots,2n)$, 分割幅を $h = (b-a)/(2n)$ とする。

$$S_{2n} = S_{2n}(f) = \tfrac{h}{3}[\{f(x_o) + 4f(x_1) + f(x_2)\} + \{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\}$$

$$+\cdots+\{f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}\}]$$

$$= \tfrac{h}{3}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\{f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\}$$

と置く。 S_{2n} を積分 $\int_a^b f(x)$ の近似値とする方法を シンプソン法 (**Sympson's rule**) と言う。

シンプソン法に関しても, 任意の連続関数 $f(x)$ に対し, 次の式が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}(f) = \int_a^b f(x)dx$$

連続関数 $f(x)$ に関する, 分割数が $2n$ のときのシンプソン法の誤差を $E_{S,2n}$ で表す。すなはち

$$E_{S,2n} = E_{S,2n}(f) = \int_a^b f(x)dx - S_{2n}(f)$$

と置く。

シンプソン法による誤差の評価は, 中点法や台形法のそれとは異なり, $f(x)$ が C^1 級である場合, C^2 級である場合, C^3 級である場合, および C^4 級以上である場合では, 差が生じることが分かった。 すなはち次の定理が得られる。

定理 4. $f(x) \in C^k[a,b]$ とする。 このとき

(1) $k=1$ ならば $E_{S,2n} = E_{S,2n}(f) = O(\frac{1}{n})$,

(2) $k=2$ ならば $E_{S,2n} = E_{S,2n}(f) = O(\frac{1}{n^2})$,

(3) $k=3$ ならば $E_{S,2n} = E_{S,2n}(f) = O(\frac{1}{n^3})$,

(4) $k\geq 4$ ならば $E_{S,2n} = E_{S,2n}(f) = O(\frac{1}{n^4})$

である。

証明. 区間 $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ に於けるシンプソン法による誤差を $E^i_{S,2n}$ と書く。　また $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とする。

(1) $k=1$ のとき。　$F(x) \in C^2$ だから $F(x)$ に関する 2 次のテーラー展開より，次式を満たす $a_i \in (x_{2i-2}, x_{2i})$ が存在する。

$$F(x_{2i}) - F(x_{2i-2}) = F'(x_{2i-2}) + \tfrac{1}{2!}F''(a_i)(x_{2i} - x_{2i-2})^2$$

$$= 2hf(x_{2i-2}) + 2h^2 f'(a_i)$$

$f(x) \in C^1$ だから　$f(x)$ に関する平均値の定理より，　次式を満たす $b_i \in (x_{2i-2}, x_{2i-1})$ および $c_i \in (x_{2i-2}, x_{2i})$ が存在する。

$$f(x_{2i-1}) = f(x_{2i-2}) + f'(b_i)h$$

$$f(x_{2i}) = f(x_{2i-2}) + f'(c_i)2h$$

区間 $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ に於ける誤差 $E^i_{S,2n}$ を計算すると，

$$E^i_{S,2n} = \textstyle\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx - \frac{h}{3}\{f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\}$$

$$= F(x_{2i}) - F(x_{2i-2}) - \tfrac{h}{3}\{f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\}$$

$$= 2hf(x_{2i-2}) + 2h^2 f'(a_i)$$

$$-\tfrac{h}{3}[f(x_{2i-2}) + 4\{f(x_{2i-2}) + f'(b_i)h\} + \{f(x_{2i-2}) + f'(c_i)2h\}]$$

$$= \tfrac{h^2}{3}\{6f'(a_i) - 4f'(b_i) - 2f'(c_i)\}$$

$$|E_{S,2n}| = |\textstyle\sum_{i=1}^n E^i_{S,2n}| = \frac{h^2}{3}|\sum_{i=1}^n\{6f'(a_i) - 4f'(b_i) - 2f'(ci)\}|$$

$$\le \tfrac{h^2}{3} \times 12M \times n = M(b-a)^2\tfrac{1}{n}$$

従って $k=1$ のとき $E_{S,2n}(f) = O(\frac{1}{n})$ となる。

(2) k=2 のとき。 $F(x) \in C^3$ だから，$F(x)$ の 3 次のテーラー展開より，次式を満たす $d_i \in (x_{2i-2}, x_{2i})$ が存在する。

$$F(X_{2i}) - F(x_{2i-2}) = F'(x_{2i-2})2h + \tfrac{1}{2!}F''(x_{2i-2})(2h)^2 + \tfrac{1}{3!}F'''(d_i)(2h)^3$$

$$= 2hf(x_{2i-2}) + 2h^2 f'(x_{2i-2}) + \tfrac{4}{3}h^3 f''(d_i)$$

$f(x)$ の 2 次数のテーラー展開より， 次のような $e_i \in (x_{2i-2}, x_{2i-1})$ および $g_i \in (x_{2i-2}, x_{2i})$ が存在する。

$$f(x_{2i-1}) = f(x_{2i-2}) + f'(x_{2i-2})h + \tfrac{1}{2}f''(e_i)h^2$$

$$f(x_{2i}) = f(x_{2i-2}) + 2f'(x_{2i-2})h + 2f''(g_i)h^2$$

区間 $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ に於ける $E^i_{S,2n}$ を計算すると，

$$E_{S,2n} = F(x_{2i}) - F(x_{2i-2}) - \tfrac{h}{3}\{f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\}$$

$$= 2hf(x_{2i-2}) + 2h^2 f'(x_{2i-2}) + \tfrac{4}{3}h^3 f''(d_i)$$

$$-\tfrac{h}{3}[f(x_{2i-2}) + 4\{f(x_{2i-2}) + hf'(x_{2i-2}) + \tfrac{h^2}{2}f''(e_i)\} + \{f(x_{2i-2}) + 2hf'(x_{2i-2}) + 2h^2 f''(g_i)\}]$$

$$= \tfrac{h^3}{3}\{4f''(d_i) - 2f''(e_i) - 2f''(g_i)\}$$

$$|E_{S,2n}| = |\textstyle\sum_{i=1}^{n} E^i_{S,2n}| \leq \tfrac{h^3}{3}\textstyle\sum_{i=1}^{n} |4f''(d_i) - 2f''(e_i) - 2f''(g_i)|$$

$$\leq \tfrac{h^3}{3} \times 8K \times n = \tfrac{1}{3}K(b-a)^3 \tfrac{1}{n^2}$$

よって $k=2$ のとき，$E_{S,2n}(f) = O(\frac{1}{n^2})$ となる。ここで $K = \max|f''(x)|$ 。

(3) $k=3$ のとき。(2) と同じ方法で，$F(x)$ については 4 次の，$f(x)$ については 3 次のテーラー展開を行うと，$E_{S,2n}(f) = O(\frac{1}{n^3})$ が示される。

(4) $k \geq 4$ のとき。(2),(3) のときと同様に, $F(x)$ については 5 次の, $f(x)$ については 4 次のテーラー展開をおこなうと, 任意の $k \geq 4$ に対し, $f(x) \in C^k$ であれば常に $E_{S,2n}(f) = O(\frac{1}{n^4})$ が成り立つことが示される。

参考文献

[1] 森口 繁一, 計算数学夜話, 日本評論社, 1987.

[2] 杉浦 洋, 入門数値計算, サイエンス社, 1997.

[3] 高田 勝, 機械計算法, 養賢堂, 1994.

[4] 山本 哲朗, 数値解析入門, サイエンス社, 1995.

[5] F.B.Hildebrand, Introduction to numerical analysis, MacGraw-Hill, 1974.

[6] A.Ralston and P.Rabinowitz, A first curse in numerical analysis, MacGraw-hILL, 1986.

[7] J.Stoer and R.Bulirsch, Introduction to numerical analysis, Springer, 1996.

（受理　平成10年３月20日）