愛知工業大学研究報告
第36号A 平成13年

連続関数の平均値の近似公式とその誤差について

Approximate Formula of Mean Value of Continuous Function and its Error Estimation

藤田 康介[†] 樋口 功[‡]

Kousuke FUJITA Isao HIGUCHI

Abstract. Let $f(x)$ be continuous on the interval $[a, b]$. The mean value $M(f)$ of $f(x)$ on $[a, b]$ is defined as follows:

$$M(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{F(b)-F(a)}{b-a},$$

where we denote by $F(x)$ the primitive function of $f(x)$.

In the case when $F(x)$ is unknown, we must calculate $M(f)$ by the aid of so-called approximate formulas.

In this paper, we shall obtain first an asymptotic expansion of the mean value $M(f)$ with the terms of Riemann's quadrature by parts and next its end-points correction formula.

We remark that the celebrated Euler-Maclaurin's summation formula is an immediate consequence of our asymptotic expansion just obtained.

Further we shall derive some approximate formulas of mean value based on the function-values at random points.

1. はじめに

有限個の数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 平均値 M は

$$M=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

で与えられる。 区間$[a,b]$上で連続な関数$f(x)$の値の平均値$M(f)$は数値が無限個あるため，上式を使って求めることはできない。 積分の平均値の定理によると$M(f)$は

$$M(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

で与えられる。 しかし$f(x)$の原始関数 $F(x)$ を求めることができない場合，この公式も使えない。

---

† 情報通信工学科・4年生
‡ 基礎教育センター・自然科学教室

筆者等は，情報通信工学科・卒業研究において，平均値 $M(f)$ の近似公式を考案しその誤差評価を行なった。

区間 $[a,b]$ を n 等分し，小区間の幅を $h=\dfrac{b-a}{n}$ とする。 更に分点を

$$a=x_0<x_1<x_2\cdots<x_n=b$$

とする。 平均値 $M(f)$ の近似値 $\overline{M}(f)$ を次の式で定義する。

$$\overline{M}(f)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})$$

このとき任意の $f\in C^k[a,b]$ に対し，次の式が成立することがわかった（**定理1**）。

$$M(f)=\overline{M}(f)+\frac{h}{2!}\overline{M}(f')+\frac{h^2}{3!}\overline{M}(f'')+\cdots+\frac{h^{k-1}}{k!}\overline{M}(f^{(k-1)})+O(h^k)$$

ここで，$O(h^k)$ は h^k の定数倍ということを示す。 この式によると，近似公式 $\overline{M}(f)$ を用いて，いくらでも精度の高い近似公式を作り出せることが分かる。

この公式は,近似公式の持つ性質や誤差の評価を理論的に調べる際,基本的な役割を演じる。 理論的には重要でも，計算に必要なデータ数が多いため，実際の計算には不向きであるといえる。

次に，上の公式でのデータ数を少なくことを考えて，以下の端点補正公式を導いた(**定理2**)。

$$M(f)=\overline{M}(f)+\frac{h}{2(b-a)}\{f(b)-f(a)\}-\frac{h^2}{12(b-a)}\{f'(b)-f'(a)\}+\frac{h^4}{720(b-a)}\{f'''(b)-f'''(a)\}+\cdots$$

物理や工学の実験では，データが等間隔分布点に関して得られるとは限らない。 有限個のランダムデータから関数の近似平均値を求めるのが，次の問題となる。

任意の $t\in[0,1]$ に対し，新たな近似公式 $\overline{M}_t(f)$ を次の式で定義する。

$$\overline{M}_t(f)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1}+th)$$

このとき， 真の平均値 $M(f)$ との誤差 $E(\overline{M}_t)(f)$ に関する次の評価式が得られた（**定理3**）。

$$E(\overline{M}_t)(f)=\begin{cases} t\neq 1/2 \text{ のとき} & O(h) \\ t=1/2 \text{ のとき} & O(h^2) \end{cases}$$

小区間内の２点を考えれば，１点の場合と比べ，公式の精度は更に高まると考えられる。 そこで，任意の $s,t\in[0,1]$ $(s<t)$ に対し，

$$\overline{M}_{s,t}(f)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\{f(x_{i-1}+sh)+f(x_{i-1}+th)\}$$

とおいて，ランダムデータに基づく２点近似公式 $\overline{M}_{s,t}(f)$ を作り，その誤差を評価した。 その結果誤差 $E(\bar{M}_{s,t})(f)$ の評価は s,t の値により異なって，

$$E(\bar{M}_{s,t})(f)=\begin{cases} s+t\neq 1\text{のとき} & O(h) \\ s+t=1\text{のとき} & O(h^2) \\ s=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6},t=\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}\text{のとき} & O(h^4) \end{cases}$$

と変わることが証明できた（**定理４**）。

更に小区間内にある任意の３点での関数値を基に作られる近似公式 $\overline{M}_{s,t,u}(f)$ を考察した。

任意の $s,t,u\in[0,1]$ $(s<t<u)$ に対し，

$$\overline{M}_{s,t,u}(f)=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}\left\{f(x_{i-1}+sh)+f(x_{i-1}+th)+f(x_{i-1}+uh)\right\}$$

とおく。 このとき真の平均値 $\overline{M}(f)$ と比較すると誤差 $E(\bar{M}_{s,t,u})(f)$ は次のように評価されることが分かった（**定理５**）。

$$E(\bar{M}_{s,t,u})(f)=\begin{cases} s+t+u\neq 3/2\text{のとき} & O(h) \\ s+t+u=3/2\text{のとき} & O(h^2) \\ s+t+u=3/2,s^2+t^2+u^2=1\text{のとき} & O(h^3) \\ s=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4},t=1/2,u=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\text{のとき} & O(h^4) \end{cases}$$

一般に分点の個数を増やすと、近似平均値の公式の精度は高まると予想される。 ところが**定理４と５を比較すると**，最良の２点近似公式と最良の３点近似公式の精度が一致することが分かった。 従って，分点の個数を増やすだけが誤差を少なくする方法とは必ずしも言えないということになる。

定理３，**定理４**および**定理５**において，s, t あるいは u の値が任意である段階では，プロットされたランダムデータだけから近似平均値を求められたが，精度はその分落ちてしまう。 しかし関数 $f(x)$ の形が不明でも，その値の平均値が近似的に計算される点に，注目したい。

これに対し，**定理３**，**定理４**および**定理５**における最良の公式は，確かに精度は高いが，分布店が固定されている。またランダムデータから導かれるのでないため，関数 $f(x)$ の具体的な形が必要となってくる。 理論的に精度の高い公式が，実際の計算をする上で使いやすいとは必ずしも言えない。

2．基本近似公式

定理１． $f(x)$ が閉区間［a,b］で C^{k-1} 級関数で，開区間（a,b）で k 回微分可能とする。　このとき，区間 $[a,b]$ 上での $f(x)$ の値の平均値 $M(f)$ は次のように漸近展開される。

$$M(f)=\overline{M}(f)+\frac{h}{2!}\overline{M}(f')+\frac{h^2}{3!}\overline{M}(f'')+\cdots+\frac{h^{k-1}}{k!}\overline{M}(f^{(k-1)})+O(h^k)$$

証明．　区間$[a,b]$をn等分し、等分した区間の幅を $h=\dfrac{b-a}{n}$ とおく。　更に分点を

$$a=x_0<x_1<x_2\cdots<x_n=b$$

とする。　このときi番目の区間の平均値$M_i(f)$は，$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を用いて

$$M_i(f)=\frac{1}{x_i-x_{i-1}}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{h}\{F(x_{i-1}+h)-F(x_{i-1})\}$$

と表せ，更に Taylor の定理より

$$M_i(f)=\frac{1}{h}\left\{hf(x_{i-1})+\frac{h^2}{2!}f'(x_{i-1})+\frac{h^3}{3!}f''(x_{i-1})+\cdots+\frac{h^k}{k!}f^{(k-1)}(x_{i-1})+O(h^{k+1})\right\}$$

$$=f(x_{i-1})+\frac{h}{2!}f'(x_{i-1})+\frac{h^2}{3!}f''(x_{i-1})+\cdots+\frac{h^{k-1}}{k!}f^{(k-1)}(x_{i-1})+O(h^k)$$

と展開される。　この $M_i(f)$ を使って $M(f)$ を計算すると

$$M(f)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{f(x_{i-1})+\frac{h}{2!}f'(x_{i-1})+\frac{h^2}{3!}f''(x_{i-1})+\cdots+\frac{h^{k-1}}{k!}f^{(k-1)}(x_{i-1})+O(h^k)\right\}$$

となる。　ここで $\overline{M}(f)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})$ であったから

$$M(f)=\overline{M}(f)+\frac{h}{2!}\overline{M}(f')+\frac{h^2}{3!}\overline{M}(f'')+\cdots+\frac{h^{k-1}}{k!}\overline{M}(f^{(k-1)})+O(h^k)$$

となり，平均値$M(f)$は上式のように展開され，定理が証明された。

3．基本近似公式の端点補正

定理２． 十分に滑らかな関数 $f(x)$ に対し，次の端点補正公式が成り立つ。

$$M(f)=\overline{M}(f)+\frac{h}{2(b-a)}\{f(b)-f(a)\}-\frac{h^2}{12(b-a)}\{f'(b)-f'(a)\}+\frac{h^4}{720(b-a)}\{f'''(b)-f'''(a)\}+\cdots$$

証明． 定理１において，f の代わりに f' を代入すると，

$$M(f')=\overline{M}(f')+\frac{h}{2!}\overline{M}(f'')+\frac{h^2}{3!}\overline{M}(f''')+\cdots$$

$$\frac{h}{2!}M(f')=\frac{h}{2!}\overline{M}(f')+\frac{h^2}{2!\cdot 2!}\overline{M}(f'')+\frac{h^3}{2!\cdot 3!}\overline{M}(f''')+\cdots$$

$$\frac{h}{2!}\overline{M}(f')=\frac{h}{2!}M(f')-\frac{h^2}{2!\cdot 2!}\overline{M}(f'')-\frac{h^3}{2!\cdot 3!}\overline{M}(f''')-\cdots$$

これらを定理１で得られた漸近展開に代入すると，

$$M(f)=\overline{M}(f)+\frac{h}{2!}M(f')+\left(\frac{h^2}{3!}-\frac{h^2}{2!\cdot 2!}\right)\overline{M}(f'')+\left(\frac{h^3}{4!}-\frac{h^3}{2!\cdot 3!}\right)\overline{M}(f''')+\cdots$$

$$=\overline{M}(f)+\frac{h}{2}M(f')-\frac{h^2}{12}\overline{M}(f'')-\frac{h^3}{24}\overline{M}(f''')+\cdots \qquad (1)$$

続いて定理１において，f の代わりに f'' を代入すると

$$M(f'')=\overline{M}(f'')+\frac{h}{2!}\overline{M}(f''')+\frac{h^2}{3!}\overline{M}(f^{(4)})+\cdots$$

$$-\frac{h^2}{12}M(f'')=-\frac{h^2}{12}\overline{M}(f'')-\frac{h^3}{12\cdot 2!}\overline{M}(f''')-\frac{h^4}{12\cdot 3!}\overline{M}(f^{(4)})+\cdots$$

$$-\frac{h^2}{12}\overline{M}(f'')=-\frac{h^2}{12}M(f'')+\frac{h^3}{12\cdot 2!}\overline{M}(f''')+\frac{h^4}{12\cdot 3!}\overline{M}(f^{(4)})+\cdots$$

この式を（1）に入する。

$$M(f)=\overline{M}(f)+\frac{h}{2}M(f')-\frac{h^2}{12}M(f'')+\left(-\frac{h^3}{24}+\frac{h^3}{12\cdot 2!}\right)\overline{M}(f''')+\left(-\frac{h^4}{80}+\frac{h^4}{12\cdot 3!}\right)\overline{M}(f^{(4)})+\cdots$$

$$=\overline{M}(f)+\frac{h}{2}M(f')-\frac{h^2}{12}M(f'')+\frac{h^4}{720}\overline{M}(f^{(4)})+\cdots$$

この操作を繰り返していくと，

$$M(f)=\overline{M}(f)+\frac{h}{2}M(f')-\frac{h^2}{12}M(f'')+\frac{h^4}{720}M(f^{(4)})+\cdots \quad\text{————————}\quad (2)$$

ところで $f'(x)$ の原始関数は $f(x)$ だから，

$$M(f')=\frac{1}{b-a}\int_a^b f'(x)dx \;=\frac{1}{b-a}\{f(b)-f(a)\}$$

同様に $M(f'')$，$M(f''')$ ，… も 計算出来て，(2) より

$$M(f)=\overline{M}(f)+\frac{h}{2(b-a)}\{f(b)-f(a)\}-\frac{h^2}{12(b-a)}\{f'(b)-f'(a)\}+\frac{h^4}{720(b-a)}\{f'''(b)-f'''(a)\}+\cdots$$

よって，端点補正公式が証明された。.

注意. 証明がかなり複雑であ Euler-Maclaurin の総和公式が定理２より直ちに導かれる。 すなはち，上の端点公式を利用した Euler-Maclaurin の総和公式の簡単な別証明が得られたことになる。

４．ランダムな１点の値から作られる近似平均値の公式

各分割小区間内のランダムな１分布店における関数値を基にした平均値の近似公式を作りたい。

定理３. 任意の $t\in[0,1]$ に対し，連続な関数 $f(x)$ の平均値の新近似値 $\overline{M}_t(f)$ を次の式で定義する。

$$\overline{M}_t(f)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1}+th)$$

このとき，真の平均値 $M(f)$ と $\overline{M}_t(f)$ の間に，次のような関係が成り立っている。

$$M(f)=\begin{cases}\overline{M}_t(f)+O(h) & t\neq 1/2\\ \\ \overline{M}_{1/2}(f)+O(h^2)\end{cases}$$

証明. 区間$[a,b]$をn等分し、i番目の区間のランダムな点$f(x_{i-1}+th)$をその区間における平均値とすると，

区間 $[a,b]$ 全体の近似平均値 $\overline{M}_t(f)$ は下のようになる。

$$\overline{M}_t(f)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1}+th)$$

上式の $f(x_{i-1}+th)$ のところを Taylor 展開すると，

$$\overline{M}_t(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{ f(x_{i-1}) + th\cdot f'(x_{i-1}) + \frac{(th)^2}{2!}f''(x_{i-1}) + \cdots + \frac{(th)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x_{i-1}) + O(h^k)\right\}$$

$$= \overline{M}(f) + th\cdot\overline{M}(f') + \frac{(th)^2}{2!}\overline{M}(f'') + \cdots + \frac{(th)^{k-1}}{(k-1)!}\overline{M}(f^{(k-1)}) + O(h^k)$$

この近似式 $\overline{M}_t(f)$ と $M(f)$ との誤差は

$$M(f) - \overline{M}_t(f) = \overline{M}(f) + \frac{h}{2!}\overline{M}(f') + \frac{h^2}{3!}\overline{M}(f'') + \cdots + \frac{h^{k-1}}{k!}\overline{M}(f^{(k-1)}) + O(h^k)$$

$$-\left\{\overline{M}(f) + th\cdot\overline{M}(f') + \frac{(th)^2}{2!}\overline{M}(f'') + \cdots + \frac{(th)^{k-1}}{(k-1)!}\overline{M}(f^{(k-1)}) + O(h^k)\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{2!} - t\right)h\cdot\overline{M}(f') + \left(\frac{1}{3!} - \frac{t^2}{2!}\right)h^2\cdot\overline{M}(f'') + \cdots$$

$$+ \left(\frac{1}{k!} - \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right)h^{k-1}\cdot\overline{M}(f^{(k-1)}) + O(h^k)$$

上式より $t \neq 1/2$ のとき度差は $O(h)$ となる。　また誤差が $O(h^2)$ 以下にするためには $t = 1/2$ とおけばよい。

このとき右辺の第 1 項目が消えて第 2 項目以降が残る。　従って $M(f)$ と $\overline{M}_t(f)$ との誤差 $E(\overline{M}_t)(f)$ は下のようになる。

$$E(\overline{M}_t)(f) = \begin{cases} t \neq 1/2 \text{のとき} & O(h) \\ t = 1/2 \text{のとき} & O(h^2) \end{cases}$$

よって定理が証明された。

注意．　定理 1 に登場する近似平均値公式 $\overline{M}(f)$ は，各分割小区間の平均値として左端点における関数値を選んで近似したものであった。　上の定理 3 での近似公式 $\overline{M}_t(f)$ は小区間内の任意の点における関数値を仮の平均値としたものである。　更に小区間の代表点として中点を選んだとき，その誤差が最も小さくなることが，示された。これは，区分求積法といわゆる中点法の関係に対応している。

5．ランダムな 2 点の値から作られる近似平均値の公式

定理 4． 任意の $s,t \in [0,1]$ $(s<t)$ に対し，連続な関数の平均値の近似値 $\overline{M}_{s,t}(f)$ を次の式で定義する。

$$\overline{M}_{s,t}(f)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\{f(x_{i-1}+sh)+f(x_{i-1}+th)\}$$

このとき，真の平均値 $M(f)$ と $\overline{M}_{s,t}(f)$ の間に次のような関係が成り立つ。

$$M(f)=\begin{cases}\overline{M}_{s,t}(f)+O(h) & s+t\neq 1\\ \overline{M}_{s,t}(f)+O(h^2) & s+t=1\\ \overline{M}_{\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3+\sqrt{3}}{6}}(f)+O(h^4) & \end{cases}$$

証明．

$$\overline{M}_{s,t}(f)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\{f(x_{i-1}+sh)+f(x_{i-1}+th)\}$$

において，$f(x_{i-1}+sh), f(x_{i-1}+th)$ をそれぞれ Taylor 展開すると，

$$\overline{M}_{s,t}(f)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left\{2f(x_{i-1})+(s+t)h\cdot f'(x_{i-1})+\frac{(s^s+t^2)h^2}{2!}f''(x_{i-1})\right.$$

$$\left.+\frac{(s^3+t^3)h^3}{3!}f'''(x_{x-1})+\cdots+\frac{(s^{k-+}+t^{k-1})h^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x_{k-1})+O(h^k)\right\}$$

$$=\overline{M}(f)+\frac{s+t}{2}h\cdot\overline{M}(f')+\frac{(s^2+t^2)h^2}{2\cdot 2!}\overline{M}(f'')+\frac{(s^3+t^3)h^3}{2\cdot 3!}\overline{M}(f''')+\cdots$$

$$+\frac{(s^{k-1}+t^{k-1})h^{k-1}}{2\cdot(k-1)!}\overline{M}(f^{(k-1)})+O(h^k)$$

この近似式 $\overline{M}_{s,t}(f)$ と $M(f)$ との誤差は

$$M(f)-\overline{M}_{s,t}(f)=\overline{M}(f)+\frac{h}{2!}\overline{M}(f')+\frac{h^2}{3!}\overline{M}(f'')+\cdots+\frac{h^{k-1}}{k!}\overline{M}(f^{(k-1)})+O(h^k)$$

$$-\left\{\overline{M}(f)+\frac{s+t}{2}h\cdot\overline{M}(f')+\frac{(s^2+t^2)h^2}{2\cdot 2!}\overline{M}(f'')\right.$$

$$+\frac{(s^3+t^3)h^3}{2\cdot 3!}\overline{M}(f''')+\cdots+\frac{(s^{k-+}+t^{k-1})h^{k-1}}{2\cdot(k-1)!}\overline{M}(f^{(k-1)})+O(h^k)\Big\}$$

$$=\left(\frac{1}{2!}-\frac{s+t}{2}\right)h\cdot\overline{M}(f')+\left(\frac{1}{3!}-\frac{s^2+t^2}{2\cdot 2!}\right)h^2\cdot\overline{M}(f'')+\cdots\qquad+\left(\frac{1}{k!}-\frac{s^{k-1}+t^{k-1}}{2\cdot(k-1)!}\right)h^{k-1}\cdot\overline{M}(f^{(k-1)})$$

上式から $s+t\neq 1$ のとき，右辺の第１項目から残るため誤差は $O(h)$ となる。 また $s+t=1$ のとき，第１項目が消えて第２項目から残るため，誤差は $O(h^2)$ となる。誤差を $O(h^3)$ 以下にするため次の連立方程式を解き s,t の値を求めればよい。

$$\begin{cases} s+t=1 \\ s^2+t^2=2/3 \end{cases}$$

$s<t$ に注意してこれを解くと

$$s=\frac{3-\sqrt{3}}{6},\qquad t=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

となる。 このとき第３項目まで同時に消えて誤差は $O(h^4)$ となり，証明が終る。

6. ランダムな３点から作られる近似平均値の公式

定理 5. 任意の $s,t,u\in[0,1]$ $(s<t<u)$ に対し，平均値の近似公式 $\overline{M}_{s,t,u}(f)$ を次の式で定義する。

$$\overline{M}_{s,t,u}(f)=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}\{f(x_{i-1}+sh)+f(x_{i-1}+th)+f(x_{i-1}+uh)\}$$

このとき，$M(f)$ $\overline{M}_{s,t,u}(f)$ の間に次のような関係が成り立つ。

$$M(f)=\begin{cases} \overline{M}_{s,t,u}(f)+O(h) & s+t+u\neq 3/2 \\ \overline{M}_{s,t,u}(f)+O(h^2) & s+t+u=3/2 \\ \overline{M}_{s,t,u}(f)+O(h^3) & s+t+u=3/2,\ s^2+t^2+u^2=1 \\ \overline{M}_{\frac{2-\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2},\frac{2+\sqrt{2}}{4}}(f)+O(h^4) & \end{cases}$$

証明. $\overline{M}_{s,t,u}(f)=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}\{f(x_{i-1}+sh)+f(x_{i-1}+th)+f(x_{i-1}+uh)\}$

において，$f(x_{i-1}+sh), f(x_{i-1}+th), f(x_{i-1}+uh)$ をそれぞれ Taylor 展開すると，

$$\overline{M}_{s,t,u}(f)=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}\left\{3f(x_{i-1})+(s+t+u)h\cdot f'(x_{i-1})+\frac{(s^2+t^2+u^2)h^2}{2!}f''(x_{i-1})\right.$$

$$+\frac{(s^3+t^3+u^3)h^3}{3!}f'''(x_{i-1})+\frac{(s^4+t^4+u^4)h^4}{4!}f^{(4)}(x_{x-1})+\cdots$$

$$\left.+\frac{(s^{k-1}+t^{k-1}+u^{k-1})h^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x_{i-1})+O(h^k)\right\}$$

$$=\overline{M}(f)+\frac{s+t+u}{3}h\cdot\overline{M}(f')+\frac{(s^2+t^2+u^2)h^2}{3\cdot 2!}\overline{M}(f'')$$

$$+\frac{(s^3+t^3+u^3)h^3}{3\cdot 3!}\overline{M}(f''')+\frac{(s^4+t^4+u^4)h^4}{3\cdot 4!}\overline{M}(f^{(4)})+\cdots$$

$$+\frac{(s^{k-1}+t^{k-1}+u^{k-1})h^{k-1}}{3\cdot(k-1)!}\overline{M}(f^{(k-1)})+O(h^k)$$

この近似式 $\overline{M}_{s,t,u}(f)$ と 真の平均値 $M(f)$ との誤差は

$$M(f)-\overline{M}_{s,t,u}(f)=\overline{M}(f)+\frac{h}{2!}\overline{M}(f')+\frac{h^2}{3!}\overline{M}(f'')+\frac{h^3}{4!}\overline{M}(f''')+\cdots+\frac{h^{k-1}}{k!}\overline{M}(f^{(k-1)})+O(h^k)$$

$$-\left\{\overline{M}(f)+\frac{s+t+u}{3}h\cdot\overline{M}(f')+\frac{(s^2+t^2+u^2)h^2}{3\cdot 2!}\overline{M}(f'')\right.$$

$$+\frac{(s^3+t^3+u^3)h^3}{3\cdot 3!}\overline{M}(f''')+\frac{(s^4+t^4+u^4)h^4}{3\cdot 4!}\overline{M}(f^{(4)})+\cdots$$

$$\left.+\frac{(s^{k-1}+t^{k-1}+u^{k-1})h^{k-1}}{3\cdot(k-1)!}\overline{M}(f^{(k-1)})+O(h^k)\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2!}-\frac{s+t+u}{3}\right)h\cdot\overline{M}(f')+\left(\frac{1}{3!}-\frac{s^2+t^2+u^2}{3\cdot 2!}\right)h^3\cdot\overline{M}(f'')$$

$$+\left(\frac{1}{k!}-\frac{s^{k-1}+t^{k-1}+u^{k-1}}{3\cdot(k-1)!}\right)h^{k-1}\cdot\overline{M}(f^{(k-1)})+\left(\frac{1}{4!}-\frac{s^3+t^3+u^3}{3\cdot3!}\right)h^3\cdot\overline{M}(f''')+\cdots$$

ここで， $s+t+u\neq 3/2$ のとき，上の式で右辺の第１項が残り，誤差は $O(h)$ となる。 また $s+t+u=3/2$ のとき，上の式で右辺の第１項目が消えて第２項目以降が残り誤差は $O(h^2)$ となる。 さらに $s+t+u=3/2$ かつ $s^2+t^2+u^2=1$ が成り立てば第２項目までが消えて第３項目以降が残り誤差は $O(h^3)$ となる。 誤差を $O(h^4)$ 以下にするため次の連立方程式を解き s,t,u の値を求めればよい。

$$\begin{cases} s+t+u=3/2 \\ s^2+t^2+u^2=1 \\ s^3+t^3+u^3=3/4 \end{cases}$$

$s<t<u$ に注意しこれを解くと，s,t,u は以下のように定まる。

$$s=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\quad,\qquad t=\frac{1}{2}\quad,\qquad u=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

以上で定理は証明された。

注意. 一般に分点の個数を増やすと，近似平均値の公式の精度は高まると予想される。 ところが**定理４と５**を比較すると最良の２点の近似公式と３点の近似公式の精度が一致することが分かった。 以上の結果より，分点の個数を増やすだけが誤差を少なくする最良の方法とは必ずしも言えないということになる。

参考文献

[1] 伊野瀬崇，樋口功，値積分の漸近展開によるEuler-Maclaurin総和公式の簡単な別証明，愛知工業大学研究報告，35号A，2000.

[2] 稲山久也，樋口功，被積分関数の滑らかさによる数値積分公式の誤差の評価について，愛知工業大学研究報告，33号A，1998.

[3] 篠崎壽夫，松下祐輔，応用数学計算法入門（上）（下），コロナ社，1971

[4] 杉浦洋，入門数値計算，サイエンス社，1991.

[5] 高田勝，機会計算法，養賢堂，1994.

[6] 秦野和朗，複合積分則の剰余項について，数値解析とそのアルゴリズム予稿集，京都大学数値解析研究所，1991.

[7] 山本哲朗，数値解析入門，サイエンス社，1995.

[8] F. B. Hidebrand, Introduction to numerical analysis, MacGraw-Hill, 1974.

[9] A. Ralston and P. Rabimowitz, A first course in numerical analysis, MacGraw-Hill, 1986.

[10 J. Stoer and R. Bulirsch, Introduction to numerical analysis, Springer－Verlag, 1996.

（受理　平成13年３月19日）