愛知工業大学研究報告
第37号A 平成14年

Newton 法による近似解列の収束性と その初等的な新証明

Convergence of Sequences of Approximate Solutions by Newton Method and its Elementary New Proof

那須　信宏[†]　　樋口　功[‡]
Nobuhiro NASU　　Isao HIGUCHI

Abstract. As the method of finding the approximate solutions of nonlinear equation, the Newton or the secant method is well known.

But, the convergence of the approximate sequence $\{x_n\}$ is not necessarily assured. Indeed, in many cases, the sequence $\{x_n\}$ does not converge to the true solution.

The classical proof of the convergence of the approximate sequence $\{x_n\}$ is done with the help of the principle of contraction mapping under some additional conditions.

The aim of this paper is to give an elementary new proof of the convergence of approximate sequence without using the principle of contraction mapping.

We should like to remark that our new method is applicable to the proof of the more complicated case of the secant method.

1. はじめに

非線形方程式 $f(x)=0$ の解は一般には求められない。そこでパソコン等を使って，真の解に代わる近似解を，計算算することになる。

近似解を求める公式として **Newton 法**が昔から知られている。Newton 法は，曲線を接線で近似する方法で，得られる近似解列の収束の速さが，他の方法に比べ大きいので，近似計算にしばしば用いられる。

ところが $f(x)$ の形や出発点の取り方により，得られた近似解の列が発散してしまう場合や，たとえ収束しても，期待される真の解には収束しないという場合がしばしば生じる。

如何なる条件の下で Newton 法による近似解列が収束するかという問題は，数学的扱いが一般に難しく，古き問題ではあるが，実はいまだ未解決である。　実際の現場では，プログラミングを作りパソコン計算を実行した後になって初めて，「このやり方ではダメだったんだ」と知らされることが多い。

このように Newton 法は，結果オーライの，いわば行き当たりバッタリの方法，という一面を持っている。

Newton 法による近似解列の収束性の，条件付き証明で典型的なものは，いわゆる **縮小写像の原理** を用いたものである。

筆者等は，情報通信工学科・卒業研究において，縮小写像原理という大定理，すなわち他人のフンドシで相撲を取るのではなく，初等的な方法で，収束性を議論してみようと考えた。

Taylor 展開と等比数列の収束性だけを用いた初等的な証明法が得られ，更にこの新証明法が，縮小写像の原理に乗せることが不可能な **割線法** の収束性の証明にも使えることが分かった。

これまでバラバラであった Newton 法と割線法の収束性の証明が統一されたことにもなるので，多少泥臭い方法ではあるが，得られた初等的な新証明法を以下に報告したい。

---

† 情報通信工学科・4 年生
‡ 自然科学教室

2. Newton 法のアルゴリズムと問題点

図 1 のような曲線 $y = f(x)$ に対し, 方程式 $f(x) = 0$ の近似解を求める。

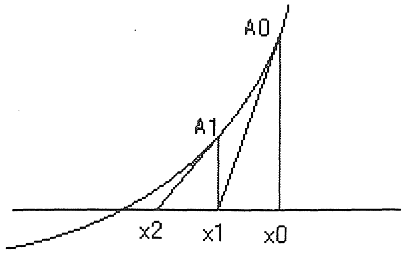

図1

Newton 法では, まず, 曲線上の適当な $A_0(x_0, f(x_0))$ に於ける接線を引き, x 軸との交点を x_1 とする。 次に $A(x_1, f(x_1))$ に於ける接線を引き, x 軸との交点を x_2 とする。 以下この操作を繰り返し, $x_3, x_4 \ldots$.を決めていき, 真の解に近づくと考えられる近似解の列 $\{x_n\}$ 作る。

$x_1, x_2, \ldots$ を計算によって求めるには, 次の反復作業を行う。

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (f'(x_0) \neq 0)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad (f'(x_1) \neq 0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (f'(x_n) \neq 0)$$

参考文献に挙げた数値計算の本等に書かれている, 収束性に関する基本定理は, 次の形である。

定理 A（Newton 法による近似解列の収束定理）.

関数 $f(x)$ が閉区間 I 上で C^2 級であり, I 上で $f'(x) \neq 0$ と仮定する。 区間 I 内にある方程式 $f(x) = 0$ の真の解を α とする。

このとき α を含む I の部分区間 I' が存在し, $x_0 \in I'$ よりスタートした反復

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad n = 0,1,2, \cdots$$

で定まる近似解の列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は真の解 α に収束する。

この定理の証明は, 通常, 以下に述べる **縮小写像の原理** という大定理を使ってなされる。

定理（縮小写像の原理）

関数 $g(x)$ *が閉区間* I *から* I *の中への縮小写像とする，すなわち*

$$/ g(x) - g(y) / \leq L / x - y /, \quad \forall_{x,y} \in I$$

を満たす定数 $L \in [0,1)$ *が存在するとき，次の（1）および（2）が成り立つ。*

（1） $g(x)$ *は* I *内にただ一つ* $\alpha = g(\alpha)$ *を満たす不動点* α *を持つ。*

（2）反復

$$x_0 \in I, \quad x_{n+1} = g(x_n) \qquad (n = 0,1,2......)$$

により定まる数列 $\{x_n\}$ *は不動点* α *に収束する。*

問題点.

次の二点が取りあえず問題となる。

（1）Newton 法による近似解列の収束性の証明に関して最も重要な部分が，**縮小写像の原理** に依存している。

（2）収束を保証するための出発点の存在範囲である部分区間 I' が不明瞭である。 従って計算を実行してみないと，収束する否か，分からないことが多い。

３．Newton 法による近似解列の収束性の初等的な証明

本章で，**縮小写像の原理を用いないで**, Newton 法による近似解列の収束性を証明したい。
合わせて，**出発点の存在範囲** I' **を決める目安を明示** したい。

実際，我々の証明は，**Taylor の定理** のみを用いた，基本的かつ簡単なものである。

定理 １.

方程式 $f(x) = 0$ *の真の解を* α *とする。関数* $f(x)$ *が区間* $I = [\alpha - d, \alpha + d]$ *で*

C^2 *級であり，* I *上で* $f'(x) \neq 0$ *が成り立つと仮定する。*

このとき，区間 $I_0 \subset I$ *が存在し，* $^\forall x_0 \in I_0$ *からスタートした反復*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n \geq 0)$$

により定められた近似解列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *は真の解* α *に収束する。*

証明.

反復

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

およびTaylorの定理により $x_1-\alpha$ を計算すると, $f(\alpha)=0$ だから

$$x_1-\alpha=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-\alpha=x_0-\alpha+\frac{f(\alpha)-f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$=x_0-\alpha+\frac{f'(x_0)(\alpha-x_0)+\dfrac{f''(\xi_0)}{2!}(\alpha-x_0)^2}{f'(x_0)}=\frac{f''(\xi_0)}{2f'(x_0)}(\alpha-x_0)^2$$

満たす ξ が α と x_0 の間に存在する。 絶対値を評価するため

$$M=\max|f''(x)|\ ,\qquad m=\min|f'(x)|\ ,\qquad K=\frac{M}{2m}$$

と置く。 ここで, I 上で $f'(x)\neq 0$ という仮定により, $m>0$ が成り立っていることに注意する。

絶対値をとると, 次の不等式が成り立つ。

$$|x_1-\alpha|\leq K|x_0-\alpha|^2$$

さらに

$$d_0=\min(\frac{1}{K},d)$$

と置き, $I_0=(\alpha-d_0,\alpha+d_0)$ で開区間 I_0 を定義すれば, I_0 が求める区間となる。

実際, 任意の $x_0\in I_0$ に対し, $|x_0-\alpha|<d_0$ かつ $Kd_0\leq 1$ が成り立つので,

$$|x_1-\alpha|\leq K|x_0-\alpha|^2<Kd_0^{\ 2}=Kd_0d_0\leq d_0$$

よって $x_1\in I_0$ となる。

一方, $r=K|x_0-\alpha|$ と置くと, 下の式が成り立つ

$$|x_1-\alpha|\leq K|x_0-\alpha|^2=\frac{1}{K}(K^2|x_0-\alpha|^2)=\frac{1}{K}r^2$$

同様に

$$|x_2-\alpha|\leq K|x_1-\alpha|^2\leq Kd_0^{\ 2}=Kd_0d_0\leq d_0$$

よって $x_2\in I_0$ となり, さらに次の不等式が得られる。

$$|x_2-\alpha|\leq K|x_1-\alpha|^2=\frac{1}{K}(K|x_1-\alpha|)^2\leq K\left|\frac{r^2}{K}\right|^2=\frac{1}{K}r^{2^2}$$

以下同様の操作を繰り返すと，任意の n に対し，$x_n \in I_0$ となり，さらに次の不等式が成り立つ。

$$|x_n - \alpha| \le K|x_{n-1} - \alpha|^2 \le \frac{1}{K} r^{2^n}$$

ここで出発点を $x_0 \in I_0$ にとれば，$r = K|x_0 - \alpha| < Kd_0 < 1$ であるから，極限をとって

$$\lim |x_n - \alpha| \le \lim \frac{1}{K} k^{2^n} = 0$$

となり，近似解列 $\{x_n\}$ が真の解 α に近づくことが証明出来た。

4. 割線法のアルゴリズムと収束

二点 $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$ を結んだ直線と x 軸との交点を x_2 とする。

二点 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ を結んだ直線と x 軸との交点を x_3 とする。

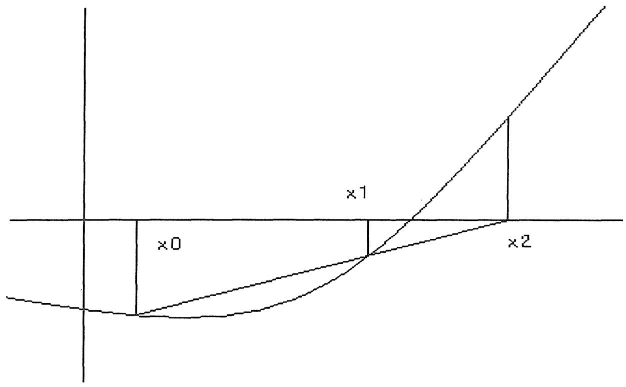

図2

以下下これを繰り返し $f(x) = 0$ の近似解列 $\{x_n\}$ を求めていく方法を **割線法（secant method）** という。 割線法の反復公式は，次の式で与えられる隣接する 3 項の間の漸化式である。

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}(x_{n+1} - x_n) \quad , \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

注意.

Newton 法の漸化式は隣接 2 項間の関係式であったので，縮小写像の原理に乗せることが出来た。
一方，割線法の漸化式は隣接 3 項間のものであるから，縮小写像の原理に頼り収束性を議論することが不可能である。

定理 1 と同様な方法で，割線法による近似解列の収束性が，次の定理の形で証明出来た。

定理 2.

方程式 $f(x)=0$ *の解を* α *とする。関数* $f(x)$ *が区間* $I=[\alpha-d,\alpha+d]$ *で* C^2 *級であり,* I *上で* $f'(x)\neq 0$ *が成り立つと仮定する。*

このとき，部分区間 $I_0\subset I$ *が存在し,* $\forall x_0,\forall x_1\in I_0$ *からスタートした反復*

$$x_{n+2}=x_{n+1}-\frac{f(x_{n+1})}{f(x_{n+1})-f(x_n)}(x_{n+1}-x_n)$$

により得られる近似解の列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *は真の解* α *に収束する。*

証明.

Lagrannge の多項式補間法により，次の式を満たす ξ が x, x_n, x_{n+1} を含む最小区間内に存在する。

$$f(x)=f(x_{n+1})+\frac{x-x_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}f(x_n)+\frac{x-x_n}{x_{n+1}-x_n}f(x_{n+1})+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_n)(x-x_{n+1})$$

ここで x に α を代入すると

$$f(\alpha)=f(x_{n+1})+\frac{f(x_n)-f(x_{n+1})}{x_n-x_{n+1}}(x_n-x_{n+1})+\frac{f''(\xi)}{2!}(\alpha-x_n)(\alpha-x_{n+1})$$

一方，反復公式より

$$x_{n+2}-\alpha=x_{n+1}-\alpha-\frac{f(x_{n+1})}{f(x_{n+1})-f(x_n)}(x_{n+1}-x_n)$$

$$=x_{n+1}-\alpha-\frac{f(x_{n+1})-f(\alpha)}{f(x_{n+1})-f(x_n)}(x_{n+1}-x_n)$$

これに上の $f(\alpha)$ の式を代入すると

$$x_{n+2}-\alpha=\frac{f''(\xi)}{2!}(\alpha-x_n)(\alpha-x_{n+1})\frac{x_{n+1}-x_n}{f(x_{n+1})-f(x_n)}$$

$$=\frac{f''(\xi)}{2}(x_n-\alpha)(x_{n+1}-\alpha)\frac{x_{n+1}-x_n}{f'(\eta_n)(x_{n+1}-x_n)}$$

$$=\frac{f''(\xi_n)}{2f'(\eta_n)}(x_n-\alpha)(x_{n+1}-\alpha)$$

ここで η_n は x_n と x_{n+1} の間の数である。なお，条件 $f'(x)\neq 0$ を最初に仮定したので，上で得た式の分母は 0 とならないことに注意したい。

絶対値をとると

$$|x_{n+2}-\alpha|=\left|\frac{f''(\xi_n)}{2f'(\eta_n)}\right||x_n-\alpha||x_{n+1}-\alpha|\le K|x_n-\alpha||x_{n+1}-\alpha|$$

$$\le\frac{1}{K}(K|x_n-\alpha|K|x_{n+1}-\alpha|)$$

となる。ここで，定数 K は次のように定めた。

$$M=\max|f''(x)| \quad x\in I$$

$$m=\min|f'(x)| \quad x\in I \qquad (f'(x)\neq 0 \text{ より } m>0)$$

$$K=\frac{M}{2m}$$

さらに

$$d_0=\min(\frac{1}{K},d)$$

と置いて，$I_0=(\alpha-d_0,\alpha+d_0)$ と定義すれば，区間 $I_0\subset I$ が求める区間となる。

実際，$x_{0,}x_1\in I_0$ の二点を任意に選び，そこから反復をスタートさせると，

$$|x_2-\alpha|\le K|x_0-\alpha||x_1-\alpha|=\frac{1}{K}(K|x_0-\alpha|)(K|x_1-\alpha|)$$

ここで，$r_0=K|x_0-\alpha|$，$r_1=K|x_1-\alpha|$ と置き，更に $r=\max(r_0,r_1)$ と置くと

$$d_0=\min(\frac{1}{K},d)$$

であったから，$Kd_0\le 1$ が成り立ち，$x_0,x_1\in I_0$ であったので、

$$r_0=K|x_0-\alpha|<Kd_0\le 1 \quad \text{かつ} \quad r_1=K|x_1-\alpha|<Kd_0\le 1$$

よって，$r=\max(r_0,r_1)<1$ である。このとき

$$|x_2-\alpha|\le K|x_0-\alpha||x_1-\alpha|<Kd_0d_0\le d_0 \quad \text{より} \quad x_2\in I_0$$

一方

$$|x_2-\alpha|\le\frac{1}{K}(K|x_0-\alpha|)(K|x_1-\alpha|)=\frac{1}{K}r_0r_1\le\frac{1}{K}r^2$$

$$|x_3-\alpha|\le K|x_1-\alpha||x_2-\alpha|<Kd_0d_0\le d_0$$

より

$$x_3 \in I_0$$

一方

$$|x_3-\alpha| \le \frac{1}{K}(K|x_1-\alpha|)(K|x_2-\alpha|) \le \frac{1}{K}r_1r^2 \le \frac{1}{K}r^3$$

$$|x_4-\alpha| \le \frac{1}{K}(K|x_2-\alpha|)(K|x_3-\alpha|) \le \frac{1}{K}r^2r^3 = \frac{1}{K}r^5$$

....

$$|x_n-\alpha| \le \frac{1}{K}r^{\left\{2+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right\}}, \qquad (n \ge 2)$$

ここで $r<1$ であったから, 極限をとると,

$$\lim|x_n-\alpha| \le \frac{1}{K}\lim r^{\left\{2+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right\}} = 0$$

従って, 任意の $x_0, x_1 \in I_0$ からスタートした近似解列 $\{x_n\}$ は, 真の解 α に必ず収束する。

以上で定理が証明された。

参考文献

[1] 篠崎壽夫, 松下裕輔, 応用数学計算法入門(上), (下), コロナ社, 1971.
[2] 杉浦洋, 入門数値計算, サイエンス社, 1997.
[3] 高田勝, 機械計算法, 養賢堂, 1994.
[4] 樋口功, Newton 法による近似解列の収束性と収束次数からみた加速法の系列について, 名古屋大学大学院, 多元数理, ポテンシャル論セミナー, 講演アブストラクト, 2001 年 11 月.
[5] 山本哲郎, 数値解析入門, サイエンス社, 1995.
[6] I.Higuchi, On the convergence of the sequences of approximate solutions by linear inverse interpolation methods, Proceedings of Conference on Potential Theory, 28-33, 2002, Kyoto Sangyo Univ.
[7] F.B.Hildebrand, Introduction to numerical analysis, MacGraw-Hill, 1974.
[8] A.Ralston and P.Rabinowitz, A first course in numerical analysis、MacGraw-Hill, 1986.
[9]] J.Stoer and R.Bulirsch, Introduction to numerical analysis, Springer-Verlag, 1996.

(受理　平成14年 3 月19日)