凹放物面回折格子に関する考察　第1報

岡　田　静　雄　　神　谷　恒　吾

Study of Concave Paraboloid Grating. (Part 1)

Shizuo OKADA　Kogo KAMIYA

Grating is the excellent dispersive element in spectroscopy. Especially in ultra violet region concave grating is the only instrument because of its dispersion and image formation faculty. In general spherical concave grating is used and the research of its theory had been began by Mack et al,(1) Beutler,(2) and synthesized to perfect form by Namioka.(3) In general image formation concave paraboloid mirror is often used as well as spherical mirror, but it has not been analysed yet the behavior of concave paraboloid grating which was cut grooves on the surface of concave paraboloid mirror.

General aberration formura about concave paraboloid grating was culculated by the method of ray-tracing.

Comparison with the aberration of spherical grating and mew type of mounting will be studied successively.

1. 緒　　　言

凹面回折格子の理論は以前から多くの人によりなされ,(1~4) 種々の収差を極小にするようなマウントが考案されている．しかるに凹放物面鏡に格子溝を刻んだ場合の収差に関しては，現在までのところ解析されておらず，よって放物面回折格子は実用化されていない．

一般に平行光束を集光する能力は球面より放物面の方がすぐれている，よって凹放物面回折格子は特別のマウントを考えるならば，より能率的なスペクトルが得られるかもしれない．今回は光学に於ては重要な収差検査等に，一般的方法として用いられる ray-tracing の方法を，球面格子について波岡が行った方式に従い凹放物面回折格子について一般的収差の式を導いた．

計算に当って回折格子の中央を原点にとったデカルト座標を用い，格子面に垂直に x 軸，格子溝の方向に z 軸をとる．点 $A(x, y, z)$ を入射スリット上の光源の点，点 $B(x', y', z')$ を A 点の像とし，$P(u, v, w)$ は回折格子面の任意の点を表わすものとする．$A\rightarrow P\rightarrow B$ なる光路での光路関数を導入し，フェルマーの原理を用いることにより解析される．

2. 光 路 関 数

y 方向に長さ v だけ離れた2つの格子溝による光路差は，格子定数を σ，用いられる光の波長を λ，m を整数として $v\cdot m\cdot\lambda/\sigma$ で与えられるから，光源 A と像点 B の間に成立する光路関数は次式で与えられる．

$$F=\overline{AP}+\overline{PB}+\frac{vm\lambda}{\sigma} \qquad (1)$$

ここで $\overline{AP}^2=(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2$

$\overline{PB}^2=(x'-u)^2+(y'-v)^2+(z'-w)^2$　であり

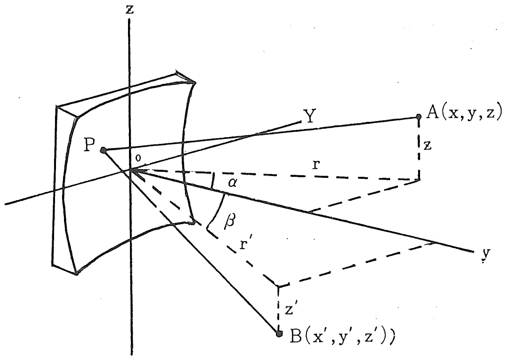
又1図に示されるように x, y, x', y' を円柱座標を用いて r, α, r', β を用いて表わすと，

$x=r\cos\alpha,\quad y=r\sin\alpha$

$x'=r'\cos\beta,\quad y'=r'\sin\beta$

$$\overline{AP}^2=r^2+z^2+(u^2+v^2+w^2)-2ur\cos\alpha-2vr\sin\alpha-2zw, \qquad (2)$$

$$\overline{PB}^2=r'^2+z'^2+(u^2+v^2+w^2)-2ur'\cos\beta-2vr'\sin\beta-2z'w, \qquad (3)$$



第 1 図

ここで用いた α 及び β は入射角及び回折角を表わし，A 点及び B 点が $x-z$ 平面の両側に存在する場合は同符号となるように角る測る．回折格子は放物面上に格子が刻まれているから任意の格子点は $u=k(v^2+w^2)$ を満足する．

この関係を(2)式に代入すると

$$\overline{AP}^2=(r-v\sin\alpha)^2+v^2(\cos^2\alpha-2kr\cos\alpha)+w^2(1-2kr\cos\alpha)-2zw+z^2+k^2(v^2+w^2)^2$$

$(r-v\sin\alpha)$ の項は他に比し十分大であるから，展開すると，

$$\begin{aligned}\overline{AP}=&(r-v\sin\alpha)\Big[1+\frac{1}{2}\frac{1}{(r-v\sin\alpha)^2}\{v^2(\cos^2\alpha-2kr\cos\alpha)+w^2(1-2kr\cos\alpha)+z^2-2zw+k^2(v^2+w^2)\}\\&-\frac{1}{8}\frac{1}{(r-v\sin\alpha)^4}\{v^2(\cos^2\alpha-2kr\cos\alpha)+w^2(1-2kr\cos\alpha)+z^2-2zw+k^2(v^2+w^2)\}^2+\cdots\cdots\Big]\\
=&r-v\sin\alpha+\frac{1}{2}v^2\left(\frac{\cos\alpha}{r}-2k\cos\alpha\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{v\sin\alpha}{r}\right)^n+\frac{1}{2}w^2\left(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\right)+\frac{1}{2}vw^2\frac{\sin\alpha}{r}\left(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\right)+\frac{z^2}{2r}\\
&-\frac{2zw}{2r}+\frac{v\sin\alpha}{2r}\cdot\frac{z^2}{r}-\frac{v\sin\alpha}{r}\cdot\frac{2zw}{2r}-\frac{v^2}{8r}\left(\frac{\cos^2\alpha}{r}-2k\cos\alpha\right)\left[\frac{v^2}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{r}-2k\cos\alpha\right)+w^2\left(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\right)\right.\\
&\left.+\frac{z^2}{r}-\frac{2zw}{r}\right]\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\left(\frac{v\sin\alpha}{r}\right)^n+\frac{v^2w^2}{2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{r^2}\left(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\right)+\frac{v^2}{2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{r^3}(z^2-2zw)\\
&+\frac{k^2}{2r}(v^2+w^2)^2+\frac{z^3w}{2r^3}-\frac{w^2}{8r}\left[\left\{w\left(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\right)-\frac{2z}{r}\right\}^2+\frac{2z^2}{r}\left(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\right)\right]+0(v^5)\\
=&r\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}-v\sin\alpha\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{zw}{r}\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{v^2}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{r}-2k\cos\alpha\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{v\sin\alpha}{r}\right)^n+\frac{w^2}{2}\left(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\right)\\
&+\frac{vw^2}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{r}\left(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\right)-vwz\frac{\sin\alpha}{r^2}-\frac{v^2}{8r}\left(\frac{\cos^2\alpha}{r}-2k\cos\alpha\right)\left[\frac{v^2}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{r}-2k\cos\alpha\right)+w^2\left(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\right)\right.\\
&\left.+\frac{1}{r}(z^2-2zw)\right]\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\left(\frac{v\sin\alpha}{r}\right)^n+\frac{v^2w^2}{2}\frac{\sin^2\alpha}{r^2}\left(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\right)+\frac{v^2}{2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{r^3}(z^2-2zw)\\
&+\frac{k^2}{2r}(v^2+w^2)^2-\frac{w^2}{8r}\left[\left\{w\left(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\right)-\frac{2z}{r}\right\}^2+\frac{2z^2}{r}\left(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\right)\right]+0(v^5)\end{aligned}\tag{4}$$

ここで $0(v^5)$ と書かれたものは v，w に関し高次の項を全て含むものである．

$\overline{PB}$ も同様に計算すると，r を r' で，z を z' で，α を β で書き換えたものとして得られる．

故に光路関数は次式にて表現される．

$$\begin{aligned}F=&\overline{AP}+\overline{PB}+\frac{vm\lambda}{\sigma}\\
=&r\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}+r'\left(1+\frac{z'^2}{r'^2}\right)^{\frac{1}{2}}+v\left[\frac{m\lambda}{\sigma}-\sin\alpha\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}-\sin\beta\left(1+\frac{z'^2}{r'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]-w\left[\frac{z}{r}\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{z'}{r'}\left(1+\frac{z'^2}{r'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\\
&+\frac{v^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}v^n\left[\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^n\left(\frac{\cos^2\alpha}{r}-2k\cos\alpha\right)+\left(\frac{\sin\beta}{r'}\right)^n\left(\frac{\cos^2\beta}{r'}-2k\cos\beta\right)\right]+\frac{w^2}{2}\left[\left(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\right)+\left(\frac{1}{r'}-2k\cos\beta\right)\right]\\
&+\frac{vw^2}{2}\left[\frac{\sin\alpha}{r}\left(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\right)+\frac{\sin\beta}{r'}\left(\frac{1}{r'}-2k\cos\beta\right)\right]-uw\left[\frac{z\sin\alpha}{r^2}+\frac{z'\sin\beta}{r'^2}\right]\\
&-\frac{v^2}{8}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\cos^2\alpha}{r}-2k\cos\alpha\right)\left\{\frac{v^2}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{r}-2k\cos\alpha\right)+w^2\left(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\right)+\frac{1}{r}(z^2-2zw)\right\}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\left(\frac{v\sin\alpha}{r}\right)^n\right.\\
&\left.+\frac{1}{r'}\left(\frac{\cos^2\beta}{r'}-2k\cos\beta\right)\left\{\frac{v^2}{2}\left(\frac{\cos^2\beta}{r'}-2k\cos\beta\right)+w^2\left(\frac{1}{r'}-2k\cos\beta\right)+\frac{1}{r'}(z'^2-2z'w)\right\}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\left(\frac{v\sin\beta}{r'}\right)^n\right]\\
&+\frac{v^2w^2}{2}\left[\frac{\sin^2\alpha}{r^2}\left(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\right)+\frac{\sin^2\beta}{r'^2}\left(\frac{1}{r'}-2k\cos\beta\right)\right]+\frac{v^2}{2}\left[\frac{\sin^2\alpha}{r^3}\left(z^2-2zw\right)+\frac{\sin^2\beta}{r'^3}(z'^2-2z'w)\right]\\
&+\frac{k^2}{2}(v^2+w^2)^2\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right]-\frac{w^2}{8}\left[\frac{1}{r}\left\{w\left(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\right)-\frac{2z}{r}\right\}^2+\frac{2z^2}{r^2}\left(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\right)+\frac{1}{r'}\left\{w\left(\frac{1}{r'}-2k\cos\beta\right)-\frac{2z'}{r'}\right\}^2\right.\\
&\left.+\frac{2z'^2}{r'^2}\left(\frac{1}{r'}-2k\cos\beta\right)\right]+0(v^5)\end{aligned}\tag{5}$$

3. 結 像 条 件

フェルマーの原理により，像点 B は光路関数 $F(v,\ w)$ が回折格子上の任意の点 $P(u,\ v,\ w)$ に対して極値となるところである．

$$\frac{\partial F}{\partial v}=0 \qquad (6) \qquad\qquad \frac{\partial F}{\partial w}=0 \qquad (7)$$

(6)，(7) の両式を任意にとった v，w に対して同時に満たす点 B は完全結像点である．しかし(6)式及び(7)式を(5)式を用いて計算すると 0 にはならず，v と w の関数として表現される．

故に v，w に関して 0 次の項を 0 とおいた場合得られる像点を Gaussian image point と呼び，高次の項による影響は収差として像を劣化させる．

(6)式を(5)式を用いて求めると，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial v}=&\Bigl[\frac{m\lambda}{\sigma}-\Bigl(1+\frac{z^2}{r^2}\Bigr)^{-\frac{1}{2}}\sin\alpha-\Bigl(1+\frac{z'^2}{r'^2}\Bigr)^{-\frac{1}{2}}\sin\beta\Bigr]+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)v^{n+1}\Bigl[\Bigl(\frac{\sin\alpha}{r}\Bigr)^n\Bigl(\frac{\cos^2\alpha}{r}-2k\cos\alpha\Bigr)\\
&+\Bigl(\frac{\sin\beta}{r'}\Bigr)^n\Bigl(\frac{\cos^2\beta}{r'}-2k\cos\beta\Bigr)\Bigr]+\frac{w^2}{2}\Bigl[\frac{\sin\alpha}{r}\Bigl(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\Bigr)+\frac{\sin\beta}{r'}\Bigl(\frac{1}{r'}-2k\cos\beta\Bigr)\Bigr]\\
&-w\Bigl[\frac{z\sin\alpha}{r^2}+\frac{z'\sin\beta}{r'^2}\Bigr]-\frac{1}{16r}\Bigl(\frac{\cos^2\alpha}{r}-2k\cos\alpha\Bigr)\Bigl[\Bigl(\frac{\cos^2\alpha}{r}-2k\cos\alpha\Bigr)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+4)v^{n+3}\Bigl(\frac{\sin\alpha}{r}\Bigr)^n\\
&+2\Bigl\{w^2\Bigl(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\Bigr)+\frac{1}{r}(z^2-2zw)\Bigr\}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)^2v^{n+1}\Bigl(\frac{\sin\alpha}{r}\Bigr)^n\Bigr]\\
&-\frac{1}{16r'}\Bigl(\frac{\cos^2\beta}{r'}-2k\cos\beta\Bigr)\Bigl[\Bigl(\frac{\cos^2\beta}{r'}-2k\cos\beta\Bigr)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+4)v^{n+3}\Bigl(\frac{\sin\beta}{r'}\Bigr)^n+2\Bigl\{w^2\Bigl(\frac{1}{r'}-2k\cos\beta\Bigr)\\
&+\frac{1}{r'}(z'^2-2z'w)\Bigr\}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)^2v^{n+1}\Bigl(\frac{\sin\beta}{r'}\Bigr)^n\Bigr]+vw^2\Bigl[\frac{\sin^2\alpha}{r^2}\Bigl(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\Bigr)+\frac{\sin^2\beta}{r'^2}\Bigl(\frac{1}{r'}-2k\cos\beta\Bigr)\Bigr]\\
&+v\Bigl[\frac{\sin^2\alpha}{r^3}(z^2-2zw)+\frac{\sin^2\beta}{r'^3}(z'^2-2z'w)\Bigr]+2k^2v(v^2+w^2)\Bigl[\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\Bigr]+0(v^4) \qquad (6')
\end{aligned}$$

同様に(7)式を計算すると，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial w}=&\Bigl[\frac{z}{r}\Bigl(1+\frac{z^2}{r^2}\Bigr)^{-\frac{1}{2}}+\frac{z'}{r'}\Bigl(1+\frac{z'^2}{r'^2}\Bigr)^{-\frac{1}{2}}\Bigr]+w\Bigl[\Bigl(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\Bigr)+\Bigl(\frac{1}{r'}-2k\cos\beta\Bigr)\Bigr]\\
&+vw\Bigl[\frac{\sin\alpha}{r}\Bigl(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\Bigr)+\frac{\sin\beta}{r'}\Bigl(\frac{1}{r'}-2k\cos\beta\Bigr)\Bigr]-v\Bigl[\frac{z\sin\alpha}{r^2}+\frac{z'\sin\beta}{r'^2}\Bigr]\\
&-\frac{v^2}{4}\Bigl[\frac{1}{r}\Bigl(\frac{\cos^2\alpha}{r}-2k\cos\alpha\Bigr)\Bigl\{w\Bigl(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\Bigr)-\frac{z}{r}\Bigr\}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\Bigl(\frac{v\sin\alpha}{r}\Bigr)^n\\
&+\frac{1}{r'}\Bigl(\frac{\cos^2\beta}{r'}-2k\cos\beta\Bigr)\Bigl\{w\Bigl(\frac{1}{r^1}-2k\cos\beta\Bigr)-\frac{z'}{r'}\Bigr\}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\Bigl(\frac{v\sin\beta}{r'}\Bigr)^n\Bigr]\\
&+v^2w\Bigl[\frac{\sin^2\alpha}{r^2}\Bigl(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\Bigr)+\frac{\sin^2\beta}{r'^2}\Bigl(\frac{1}{r'}-2k\cos\beta\Bigr)\Bigr]-v^2\Bigl[\frac{z\sin^2\alpha}{r^3}+\frac{z'\sin^2\beta}{r'^3}\Bigr]\\
&+2k^2w(v^2+w^2)\Bigl[\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\Bigr]-\frac{w}{2}\Bigl[\frac{1}{r}\Bigl\{w\Bigl(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\Bigr)-\frac{2z}{r}\Bigr\}\Bigl\{w\Bigl(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\Bigr)-\frac{z}{r}\Bigr\}\\
&+\frac{z^2}{r^2}\Bigl(\frac{1}{r}-2k\cos\alpha\Bigr)+\frac{1}{r'}\Bigl\{w\Bigl(\frac{1}{r'}-2k\cos\beta\Bigr)-\frac{2z'}{r'}\Bigr\}\Bigl\{w\Bigl(\frac{1}{r'}-2k\cos\beta\Bigr)-\frac{z'}{r'}\Bigr\}+\frac{z'^2}{r'^2}\Bigl(\frac{1}{r'}-2k\cos\beta\Bigr)\Bigr]+0(v^4) \qquad (7')
\end{aligned}$$

(6′)，(7′) 式に於て v，w に関し 0 次の項を0とおく時，スリットの中心から像の中心への光線 central-ray APB に関する式を表わし，像の出来る方向を示す．

スリットの中心及び像の中心を $(r_0,\ \beta_0,\ z_0)$，$(r_0',\ \beta_0',\ z_0')$ で表わすと，

$$\begin{cases}
\dfrac{m\lambda}{\sigma}-\Bigl(1+\dfrac{z_0{}^2}{r_0{}^2}\Bigr)^{-\frac{1}{2}}\sin\alpha_0-\Bigl(1+\dfrac{z_0'^2}{r_0'^2}\Bigr)^{-\frac{1}{2}}\sin\beta_0=0 & (8)\\[2ex]
\dfrac{z}{r}\Bigl(1+\dfrac{z_0{}^2}{r_0{}^2}\Bigr)^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{z_0'}{r_0'}\Bigl(1+\dfrac{z_0'^2}{r_0'^2}\Bigr)^{-\frac{1}{2}}=0 & (9)
\end{cases}$$

(9)式より $\dfrac{z_0}{r_0}=-\dfrac{z_0'}{r_0'}$……(9′) が得られ，これを(8)式に代入すると，

$$\Bigl(1+\frac{z_0{}^2}{r_0{}^2}\Bigr)^{-\frac{1}{2}}(\sin\alpha_0+\sin\beta_0)=\frac{m\lambda}{\sigma} \qquad (8')$$

となり格子方程式を表わしており，像の出来る方向を示す．

次に $\dfrac{\partial F}{\partial v}$ の v の影響を最小にするために，(6′) 式の第2項の $n=0$ の項を0にするようにマウントを考える．

$$\frac{\cos^2\alpha}{r}-2k\cos\alpha+\frac{\cos^2\beta}{r'}-2k\cos\beta=0 \tag{10}$$

解として2組考えられるが第1の解として対称解

$$r=\frac{\cos\alpha}{2k},\quad r'=\frac{\cos\beta}{2k}$$

が得られる．放物面 $u=k(v^2+w^2)$ の焦点の座標を $(p,\ o,\ 0)$ で表わすと，$u=\frac{1}{4p}(v^2+w^2)$ となり，$k=\frac{1}{4p}$ だから

$$r=2p\cos\alpha,\qquad r'=2p\cos\beta \tag{11}$$

第2の解として $r=\infty$ の場合で

$$r=\infty,\qquad r'=\frac{2p\cos^2\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} \tag{12}$$

が得られる．

第1の解(11)式は直径 $2p$ の円柱の表面に入射スリット，回折格子及び写真乾板を置くことを示しており，この円柱面を球面格子の場合と同様 Rowland シリンダーと呼ぶこととする．

第2の解(12)式は Wadsworth maunting を示す．

ここでは第1の解 Rowland シリンダー上にマウントする場合のみに限って収差の計算をなす．

(11) 式を (5) 式に代入し，v, w に関し4次までの項をまとめると，

$$\begin{aligned}F=2p&\left[\left(1+\frac{z^2}{4p^2\cos^2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+\left(1+\frac{z'^2}{4p^2\cos^2\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\beta\right]+v\left[\frac{m\lambda}{\sigma}-\left(1+\frac{z^2}{4p^2\cos^2\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}\sin\alpha-\left(1+\frac{z'^2}{4p^2\cos^2\beta}\right)^{-\frac{1}{2}}\sin\beta\right]\\&-\frac{w}{2p}\left[\frac{z}{\cos\alpha}\left(1+\frac{z^2}{4p^2\cos^2\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{z'}{\cos\beta}\left(1+\frac{z'^2}{4p^2\cos^2\beta}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]+\frac{w^2}{4p}\left[\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}\right]\\&+\frac{v}{8p^2}\left[w^2\left(\frac{\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^3\beta}{\cos^2\beta}\right)-2w\left(\frac{z\sin\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{z'\sin\beta}{\cos^2\beta}\right)\right]+\frac{1}{16p^3}\left[v^2w^2\left(\frac{\sin^4\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{\sin^4\beta}{\cos^3\beta}\right)\right.\\&-2v^2w\left(\frac{z\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{z'\sin^2\beta}{\cos^3\beta}\right)+v^2\left(\frac{z^2\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{z'^2\sin^3\beta}{\cos^3\beta}\right)+\frac{(v^2+w^2)^2}{4}\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}\right)\\&\left.-\frac{w^2}{4\cos^3\alpha}\{(w\sin^2\alpha-2z)^2+2z^2\sin^2\alpha\}-\frac{w^2}{4\cos^3\beta}\{(w\sin^2\beta-2z')^2+2z'^2\sin^2\beta\}\right]+0(v^5)\end{aligned} \tag{13}$$

(13) 式を (6), (7) 式の F として用いると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial v}=&\left[\frac{m\lambda}{\sigma}-\left(1+\frac{z^2}{4p^2\cos^2\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}\sin\alpha-\left(1+\frac{z'^2}{4p^2\cos^2\beta}\right)^{-\frac{1}{2}}\sin\beta\right]+\frac{1}{8p^2}\left[w^2\left(\frac{\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^3\beta}{\cos^2\beta}\right)-2w\left(\frac{z\sin\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{z'\sin\beta}{\cos^2\beta}\right)\right]\\&+\frac{v}{8p^3}\left[w^2\left(\frac{\sin^4\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{\sin^4\beta}{\cos^3\beta}\right)-2w\left(\frac{z\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{z'\sin^2\beta}{\cos^3\beta}\right)+\left(\frac{z^2\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{z'^2\sin^2\beta}{\cos^3\beta}\right)+\frac{(v^2+w^2)^2}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}\right)\right]\\&+0(v^4)=0\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial w}=&-\frac{1}{2p}\left[\frac{z}{\cos\alpha}\left(1+\frac{z^2}{4p^2\cos^2\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{z'}{\cos\beta}\left(1+\frac{z'^2}{4p^2\cos^2\beta}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]+\frac{w}{2p}\left[\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}\right]\\&+\frac{v}{4p^2}\left[w\left(\frac{\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^3\beta}{\cos^2\beta}\right)-\left(\frac{z\sin\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{z'\sin\beta}{\cos^2\beta}\right)\right]+\frac{1}{8p^3}\left[v^2w\left(\frac{\sin^4\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{\sin^4\beta}{\cos^3\beta}\right)-v^2\left(\frac{z\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{z'\sin^2\beta}{\cos^3\beta}\right)\right.\\&+\frac{(v^2+w^2)w}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}\right)-\frac{w}{2\cos^3\alpha}\{(w\sin^2\alpha-2z)(w\sin^2\alpha-z)+z^2\sin^2\alpha\}\\&\left.-\frac{w}{2\cos^3\beta}\{(w\sin^2\beta-2z')(w\sin^2\beta-z')+z'^2\sin^2\beta\}\right]+0(v^4)=0\end{aligned} \tag{15}$$

が得られ(14), (15)式の0次の項を0とおくことにより central ray の式

$$\frac{z_0}{\cos\alpha_0}=-\frac{z_0'}{\cos\beta_0} \tag{16}$$

$$\left(1+\frac{z_0^2}{4p^2\cos^2\alpha_0}\right)^{-\frac{1}{2}}(\sin\alpha_0+\sin\beta_0)=\frac{m\lambda}{\sigma} \tag{17}$$

が求められる．

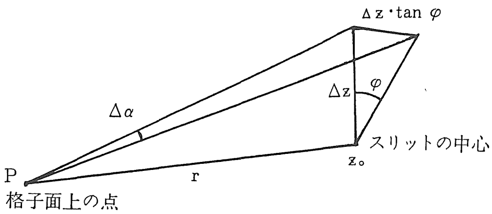
4. Rowland シリンダーマウントにおける収差

$(r_0,\ \alpha_0,\ z_0)$, $(r_0',\ \alpha_0',\ z_0')$ を各々スリットの中心及び像の中心の座標とする．スリットの任意の点の z 座標は $z=z_0+\Delta z$ で表わし，像の任意の点の z 座標は $z'=z_0'+\Delta z'$ と記す．α_0 はスリットの中心より格子への入射角，β_0 は格子面よりの central ray による回折角を示し，像の任意の点への回折角は $\beta=\beta_0+\Delta\beta$ で与えるものとする．入

射スリットが回折格子の格子溝と平行でなく角 φ だけ傾いている時，スリットの任意の点より格子面への入射角は $\alpha=\alpha_0+\Delta\alpha$ で表わすが，この $\Delta\alpha$ は第2図により

$$\Delta\alpha \fallingdotseq \frac{\Delta z}{r}\tan\varphi \fallingdotseq \frac{\Delta z\cdot\varphi}{2p\cos\alpha_0} \tag{18}$$

で与えられる．



第 2 図

次に⒂式より w を求めると，

$$w=\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}\right)^{-1}\cdot\left[1+\frac{v}{2p}\cdot\frac{\sin^3\alpha\cos^2\beta+\sin^3\beta\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta(\sin^2\alpha\cos\beta+\sin^2\beta\cdot\cos\alpha)}\right]^{-1}\cdot$$
$$\left[\frac{z}{\cos\alpha}+\frac{z'}{\cos\beta}+\frac{v}{2p}\left(\frac{z\sin\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{z'\sin\beta}{\cos^2\beta}\right)+0(v^3)\right]$$
$$=\frac{1}{A}\left[z\cos\beta+z'\cos\alpha+\frac{v}{2pA}\sin(\alpha-\beta)(z\sin^2\beta-z'\sin^2\alpha)+0(v^3)\right] \tag{19}$$

ここで $A=\sin^2\alpha\cdot\cos\beta+\sin^2\beta\cdot\cos\alpha$ と置いた．

⒆式に⒃，⒄式及び $z=z_0+\Delta z$，$z'=z_0'+\Delta z'$，$\alpha=\alpha_0+\Delta\alpha$，$\beta=\beta_0+\Delta\beta$ を代入する．

$$w=\frac{1}{A_0}\left[\Delta z\cos\beta_0+\Delta z'\cos\alpha_0+\frac{v}{2pA_0}\sin(\alpha_0-\beta_0)\left(\frac{z_0A_0}{\cos\alpha_0}+\Delta z\sin^2\beta_0-\Delta z'\sin^2\alpha_0\right)+0(v^3)\right] \tag{20}$$

ここで式 A_0 は $A_0=\sin^2\alpha_0\cos\beta_0+\sin^2\beta\cos\alpha_0$ である．

⒁式にも同様⒃，⒄式及び $z=z_0+\Delta z$，$z'=z_0'+\Delta z'$，$\alpha=\alpha_0+\Delta\alpha$，$\beta=\beta_0+\Delta\beta$ を代入すると，

$$\frac{m\lambda}{\sigma}-\left(1+\frac{z_0^2}{4p^2\cos^2\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}(\sin\alpha_0+\sin\beta_0)-(\cos\alpha_0\cdot\Delta\alpha+\cos\beta_0\cdot\Delta\beta)+\frac{1}{8p^2}\left[w^2\left(\frac{\sin^3\alpha_0}{\cos^2\alpha_0}+\frac{\sin^3\beta_0}{\cos^2\beta_0}\right)\right.$$
$$+\frac{z_0^2}{\cos^2\alpha_0}(\sin\alpha_0+\sin\beta_0)+\frac{2z_0}{\cos\alpha_0}(\Delta z\tan\alpha_0-\Delta z'\tan\beta_0)+(\Delta z)^2\frac{\sin\alpha_0}{\cos^2\alpha_0}+(\Delta z')^2\frac{\sin\beta_0}{\cos^2\beta_0}$$
$$\left.-\frac{2z_0w\sin(\alpha_0-\beta_0)}{\cos^2\alpha_0\cos\beta_0}-2w\left(\Delta z\frac{\sin\alpha_0}{\cos^2\alpha_0}+\Delta z'\frac{\sin\beta_0}{\cos^2\beta_0}\right)\right]+\frac{v}{8p^3}\left[w^2\left(\frac{\sin^4\alpha_0}{\cos^3\alpha_0}+\frac{\sin^4\beta_0}{\cos^3\beta_0}\right)\right.$$
$$+\frac{z_0^2A_0}{\cos^3\alpha_0\cdot\cos\beta_0}+2z_0\cdot\Delta z\frac{\sin^2\alpha_0}{\cos^3\alpha_0}-2z_0\Delta z'\frac{\sin^2\beta_0}{\cos\alpha_0\cos\beta_0}+(\Delta z)^2\frac{\sin^2\alpha_0}{\cos^3\alpha_0}+(\Delta z')^2\frac{\sin^2\beta_0}{\cos^3\beta_0}$$
$$\left.-\frac{2z_0w}{\cos^3\alpha_0\cos^2\beta_0}\sin(\alpha_0+\beta_0)\sin(\alpha_0-\beta_0)-2w\left(\Delta z\frac{\sin^2\alpha_0}{\cos^3\alpha_0}+\Delta z'\frac{\sin^2\beta_0}{\cos^3\beta_0}\right)-2p\varphi\tan\alpha_0\cdot\Delta z\right]$$
$$+\frac{u(v^2+w^2)}{16p^3\cos\alpha_0\cos\beta_0}(\cos\alpha_0+\cos\beta_0)+0(v^4)=0 \tag{21}$$

⒇式に⒇式を代入し，⒃，⒄，⒅式を用いて回折角の角分散を表わす式を求めると，

$$\Delta\beta\cdot\cos\beta_0=\frac{1}{8p^2}\left[2z_0\cdot\Delta z\left\{\frac{\sin\alpha_0}{\cos^2\alpha_0}-\frac{2p\varphi}{z_0}-\frac{\sin(\alpha_0-\beta_0)}{A_0\cos^2\alpha_0}\right\}-B\cdot z_0\cdot\Delta z'+C(\Delta z)^2+D(\Delta z')^2-E\Delta z\cdot\Delta z'\right]$$
$$+\frac{v}{8p^3}\left[z_0\cdot\Delta z\left\{\tan\alpha_0\left(\frac{2\sin\alpha_0}{\cos^2\alpha_0}-\frac{2p\varphi}{z_0}\right)-G\right\}-H\cdot z_0\cdot\Delta z'+J\cdot(\Delta z)^2+K\cdot(\Delta z')^2+M\cdot\Delta z\cdot\Delta z'\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sec^3\alpha_0\sec\beta_0\left\{\underline{v^2(\cos\alpha_0+\cos\beta_0)\cos^2\alpha_0+2A_0z_0^2}-\frac{2z_0}{A_0}\sin^2(\alpha_0-\beta_0)\right\}\right] \tag{22}$$

ここで用いられる B，C，D，E，G，H，J，K，M は α_0，β_0 の関数で，次式で与えられるものである．

$$B=\frac{2}{\cos\alpha_0\cdot\cos\beta_0}\left[\sin\beta_0+\frac{\sin(\alpha_0-\beta_0)}{A_0}\right],$$

$$C=\frac{1}{\cos^2\alpha_0}\left[\sin\alpha_0-\frac{\sin\alpha_0\cdot\cos\beta_0}{A_0}+\frac{\sin^2\beta_0\cdot\cos\alpha_0\cdot\sin(\alpha_0-\beta_0)}{A_0^2}\right],$$

$$D=\frac{1}{\cos^2\beta_0}\left[\sin\beta_0-\frac{\sin\beta_0\cdot\cos\alpha_0}{A_0}+\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos\beta_0\cdot\sin(\alpha_0-\beta_0)}{A_0^2}\right],$$

$$E=\frac{2}{A_0^2}\sin\alpha_0\cdot\sin\beta_0(\sin\alpha_0+\sin\beta_0),$$

$$G=\frac{1}{A_0}\cdot\frac{\sin(\alpha_0-\beta_0)}{\cos^3\alpha_0\cdot\cos\beta_0}\left[2\sin(\alpha_0+\beta_0)+\sin\alpha_0\cdot\cos\beta_0-\frac{\cos^2\alpha_0\cos^2\beta_0}{A_0}+\frac{\sin^2\beta_0\cdot\cos\alpha_0\cdot\sin(\alpha_0-\beta_0)}{A_0^2}\right],$$

$$H=\frac{1}{\cos^2\alpha_0\cdot\cos^2\beta_0}\left[2\sin^2\beta_0\cdot\cos\alpha_0+\frac{1}{A_0}\sin(\alpha_0-\beta_0)\left\{2\sin(\alpha_0+\beta_0)+\sin\beta_0\cdot\cos\alpha_0-\frac{\cos^2\alpha_0\cdot\cos^2\beta_0}{A_0}\right\}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{A_0^2}\sin^2\alpha_0\cos\beta_0\sin^2(\alpha_0-\beta_0)\right],$$

$$J=\frac{1}{A_0{}^2}\left(\frac{\sin^4\alpha_0}{\cos^3\alpha_0}+\frac{\sin^4\beta_0}{\cos^3\beta_0}\right)\cos^2\beta_0+\frac{\sin^2\alpha_0}{\cos^3\alpha_0}+\frac{\cos\beta_0}{2A_0\cos^3\alpha_0}\underline{\left[\frac{(\cos\alpha_0+\cos\beta_0)\cos^2\alpha_0}{A_0}-4\sin^2\alpha_0\right]}$$

$$+\frac{1}{A_0{}^2}\sin(\alpha_0-\beta_0)\sin^2\beta_0\underline{\left[\frac{1}{A_0}\left(\frac{\sin^3\alpha_0}{\cos^2\alpha_0}+\frac{\sin^3\beta_0}{\cos^3\beta_0}\right)\cos\beta_0-\frac{\sin\alpha_0}{\cos^2\alpha_0}\right]},$$

$$K=\frac{1}{A_0{}^2}\left(\frac{\sin^4\alpha_0}{\cos^3\alpha_0}+\frac{\sin^4\beta_0}{\cos^3\beta_0}\right)\cos^2\alpha_0+\frac{\sin^2\beta_0}{\cos^3\beta_0}+\frac{\cos\alpha_0}{2A_0\cos^3\beta_0}\underline{\left[\frac{(\cos\alpha_0+\cos\beta_0)\cos^2\beta_0}{A_0}-4\sin^2\beta_0\right]}$$

$$+\frac{1}{A_0{}^2}\sin(\alpha_0-\beta_0)\sin^2\alpha_0\underline{\left[\frac{\sin\beta_0}{\cos^2\beta_0}-\frac{1}{A_0}\left(\frac{\sin^3\alpha_0}{\cos^2\alpha_0}+\frac{\sin^3\beta_0}{\cos^2\beta_0}\right)\cos\alpha_0\right]},$$

$$M=\frac{2}{A_0{}^2}\cos\alpha_0\cdot\cos\beta_0\left(\frac{\sin^4\alpha_0}{\sin^3\alpha_0}+\frac{\sin^4\beta_0}{\cos^3\beta_0}\right)+\frac{1}{A_0}\left(\frac{\cos\alpha_0+\cos\beta_0}{A_0}-2\tan^2\alpha_0-2\tan^2\beta_0\right)$$

$$+\frac{\sin(\alpha_0-\beta_0)}{A_0{}^2}\left[\frac{\sin^3\alpha_0}{\cos^2\alpha_0}-\frac{\sin^3\beta_0}{\cos^2\beta_0}+\frac{1}{A_0}(\sin^2\beta_0\cdot\cos\alpha_0-\sin^2\alpha_0\cdot\cos\beta_0)\left(\frac{\sin^3\alpha_0}{\cos^2\alpha_0}+\frac{\sin^3\beta_0}{\cos^2\beta_0}\right)\right].$$

ここで用いられた Δz, $\Delta z'$ には次の条件が課されている. Δz はスリットの長さの半分より小である, 故にスリットの長さを $2a_0$ とすると,

$$-a_0\leq\Delta z\leq a_0 \tag{23}$$

格子の溝の長さを L とすると,

$$-\frac{A_0L}{2\cos\alpha_0}-\Delta z\cdot\frac{\cos\beta_0}{\cos\alpha_0}\leq\Delta z'\leq\frac{A_0L}{2\cos z_0}-\Delta z\frac{\cos\beta_0}{\cos\alpha_0} \tag{24}$$

収差を表わす式(22)に最も多く影響を与える項 $2z_0\cdot\Delta z\left\{\frac{\sin\alpha_0}{\cos^2\alpha_0}-\frac{2p\varphi}{z_0}-\frac{\sin(\alpha_0-\beta_0)}{A_0\cos^2\alpha_0}\right\}$ を最小にするようにマムントするにはスリットの傾角 φ に次の条件を課せばよい.

$$\varphi=\frac{z_0}{2p}\ \frac{\sin\alpha_0}{\cos^2\alpha_0} \tag{25}$$

$z_0=0$ で与えられる平面マウントに於ては $\varphi=0$ であり, 格子の溝に対して スリットを平行に置くこととなり, (22) 式はこのとき

$$\Delta\beta\cdot\cos\beta_0=\frac{1}{8p^2}[C\cdot(\Delta z)^2+D\cdot(\Delta z')^2-E\cdot\Delta z\cdot\Delta z']+\frac{v}{8p^3}\left[J\cdot(\Delta z)^2+K\cdot(\Delta z')^2+M\cdot\Delta z\cdot\Delta z'\right.$$
$$\left.+\frac{v^2}{2}\cdot\frac{\cos\alpha_0+\cos\beta_0}{\cos\alpha_0\cdot\cos\beta_0}\right] \tag{26}$$

で与えられる.

$z_0\fallingdotseq 0$ で与えられる平面外マウントに於ては, スリットを(25)式で示す φ だけ傾ける. そのとき(22)式は

$$\Delta\beta\cdot\cos\beta_0=\frac{1}{8p^2}\left[-2\cdot z_0\cdot\Delta z\frac{\sin(\alpha_0-\beta_0)}{A_0\cos^2\alpha}-B\cdot z_0\cdot\Delta z'+C\cdot(\Delta z)^2+D\cdot(\Delta z')^2-E\cdot\Delta z\cdot\Delta z'\right]$$
$$+\frac{v}{8p^3}\left[(\tan^2\alpha_0\cdot\sec\alpha_0-G)z_0\cdot\Delta z-H\cdot z_0\cdot\Delta z'+J\cdot(\Delta z)^2-K\cdot(\Delta z')^2+M\cdot\Delta z\cdot\Delta z'\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sec^3\alpha_0\cdot\sec\beta_0\left\{v^2(\cos\alpha_0+\cos\beta_0)+2A_0z_0{}^2-\frac{2z_0}{A_0}\sin^2(\alpha_0-\beta_0)\right\}\right] \tag{26'}$$

次に縦方向の収差を表わすために(19)式を次のように近似する

$$w\fallingdotseq\frac{1}{A_0}(\Delta z\cdot\cos\beta_0+\Delta z'\cdot\cos\alpha_0)$$

故に $\Delta z'\fallingdotseq\frac{wA_0}{\cos\alpha_0}-\Delta z\cdot\frac{\cos\beta_0}{\cos\alpha_0}$

格子の溝の長さを L で表わすと, w のとりうる値は $-L/2\leq w\leq L/2$ である.

縦方向の収差は, $\Delta z'$ の最大値と最小値との差として与えられるから

$$[\Delta z']_{ast.}=\left(\frac{LA_0}{2\cos\alpha_0}-\Delta z\frac{\cos\beta_0}{\cos\alpha_0}\right)-\left(-\frac{LA_0}{2\cos\alpha_0}-\Delta z\cdot\frac{\cos\beta_0}{\cos\alpha_0}\right)=\frac{LA_0}{\cos\alpha_0}$$

となり球面格子の場合と同じである.

(22)式に於ける下線は球面格子における収差との差異を示すために引かれたものである.

5. あとがき

このレポートでは凹放物面格子に於ける収差の一般式が求められたのみであり, 今後この一般式を基として各 α, β の組に対して収差の数値計算を実行し, 球面格子を用いて分光する場合より収差が少く, 実用とされうるマウントが存在するかどうかの検討をおこないたい.

文　献

1) Mack, Stehn, Fillen, J. Opt. Soc. Am. 22. 245 (1932)
J.E. Mack and J.R. Stehn, J. Opt. Soc. Am. 23. 184 (1933)
2) H. G. Beutler, J. Opt. Soc. Am. 35. 311 (1945)
3) T. Namioka, J. Opt. Soc. Am. 49. 446 (1959)
4) M. Seya, Science of Light. Vol 2. 1, pp. 8 (1952)
J. Opt. Soc. Am. 49. 951 (1959)