愛知工業大学研究報告
第 50 号　平成 27 年

コラッツ予想に関連するいくつかの関数について

On Some Functions Concerned with Collatz Problem

隅山孝夫[†]
Takao Sumiyama

Abstract. Let a be a positive integer. Let us define a sequence $\{a_n\}$ by $a_1 = a$, $a_{n+1} = 3a_n + 1$ (if a_n is odd), and $a_{n+1} = a_n/2$ (if a_n is even). Then we find an integer m such that $a_m = 1$. This is unsolved, and is known as Collatz problem. This paper makes a report on the case the function $a_{n+1} = 3a_n + 1$ is replaced with another function.

1. はじめに

正整数 a に対して,

$$a_1 = a, \qquad a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n + 1 & (a_n\text{が奇数}) \\ a_n/2 & (a_n\text{が偶数}) \end{cases}$$

によって数列 $\{a_n\}$ を定義する。

例えば $a = 7$ ならば,

$a_1 = 7,\ a_2 = 22,\ a_3 = 11,\ a_4 = 34,\ a_5 = 17,\ a_6 = 52,\ a_7 = 26,\ a_8 = 13,\ a_9 = 40,\ a_{10} = 20,\ a_{11} = 10,$
$a_{12} = 5,\ a_{13} = 16,\ a_{14} = 8,\ a_{15} = 4,\ a_{16} = 2,\ a_{17} = 1$

となる。

a がいかなる正整数であってもいつか必ず $a_n = 1$ となるという予想が Collatz 予想と呼ばれるものである。わが国では角谷予想とも呼ばれている。

7586054706036736 以下の正整数についてはこの予想が正しいことが計算機によって確かめられているが, 全ての正整数について正しいという証明はまだ知られていない（[1], [2] 第 1 章 §6)。

問題を少し拡張して整理する。

定数 k は奇数の正整数とする。正整数 a に対して,

$$a_1 = a, \qquad a_{n+1} = \begin{cases} ka_n + 1 & (a_n\text{が奇数}) \\ a_n/2 & (a_n\text{が偶数}) \end{cases}$$

によって数列 $\{a_n\}$ を定義する。定数 k を数列 $\{a_n\}$ の pitch と呼ぶことにする。k を奇数とする理由は, もしも k を偶数とするならば, 常に数列 $\{a_n\}$ が発散することは自明だからである。

数列 $\{a_n\}$ の行方については, 3 つの可能性がある。

(1) いつか $a_n = 1$ となる。

(2) $a_n = 1$ となることはなく, 循環する。即ち $a_n = a_{n+t} \neq 1$ となる正の整数 n, t が存在する。

(3) 無限大に発散する。

(1) の場合, a は終了型であると言い, (2) の場合, a は循環型であると言い, (3) の場合, a は発散型であると言うことにする。すると Collatz 予想は,「pitch が 3 のとき, すべての正整数は終了型である。」と言い換えることができる。

[†]愛知工業大学 基礎教育センター（豊田市）

愛知工業大学研究報告, 第 50 号, 平成 27 年, Vol.50, Mar. 2015

pitch が 3 以外では, 循環型の場合も, 終了型の場合も存在する。このことに関しては, 次のような問題が考えられる。

問題 1 . pitch が 3 のとき, 実際に全ての正整数は終了型であるか？

問題 2. pitch が 3 以外で, 全ての正整数が終了型となる場合があるか？

問題 3. pitch が 3 以外の場合は, 必ず発散型の正整数が存在するか？

問題 4. 固定された pitch に対して, ある正整数が終了型, 循環型, あるいは発散型であるための必要十分条件は何か？

これらの問題は, 現在のところいずれも未解決であるのみならず, 解決の糸口さえ全く見えていないというのが実情である。

本稿の目的は, pitch を 3 以外とした場合の数値実験の結果を報告することと, a_n が奇数の場合の $a_{n+1} = ka_n+1$ を一次式以外のもので置き換えた場合にどのようになるかを論じることである。

2. pitch が 3 の場合, 3 以外の場合

次のデータは pitch が 3 の場合であり, これがいわゆる Collatz 予想である。a = 3 End というのは, 3 が終了型であることを示しており, 以下同様である。偶数の場合は奇数の場合に帰着するので, 奇数の場合のみ示してある。

```
Ceiling of Digits 35
Pitch = 3
a = 3 End
a = 5 End
a = 7 End
a = 9 End
a = 11 End
a = 13 End
a = 15 End
a = 17 End
a = 19 End
a = 21 End
a = 23 End
a = 25 End
a = 27 End
a = 29 End
a = 31 End
a = 33 End
a = 35 End
a = 37 End
a = 39 End
a = 41 End
a = 43 End
a = 45 End
a = 47 End
a = 49 End
a = 51 End
a = 53 End
a = 55 End
a = 57 End
a = 59 End
a = 61 End
a = 63 End
a = 65 End
a = 67 End
a = 69 End
```

上の計算に用いたプログラムは以下の通りであり, Active Basic による。Ceiling of Digits とあるのは計算精度の限界ではなく, 計算途中でその桁数を超えたら Out of Range と表示して次のステップに進むことを意味している。

```
'Kakutani-Rev20
#console
Dim a(100000) As Single
Dim n(100000) As Single
Dim e(100000) As Single
Dim d(100000) As Single
Dim f(100000) As Single
Dim nz As Single
Dim ix As Single
Dim iz As Single
Dim tz As Single
Dim nx As Single
Dim uz As Single
Dim jx As Single
Dim jy As Single
Dim mu As Single
Dim px As Single
Dim tx As Single
Dim ny As Single
Dim ku As Single
Dim b_a As Single
Dim iw As Single
Dim ux As Single
Dim sx As Single
```

```
Dim sz As Single
Dim wz As Single
Dim wl As Single
Dim p(100000) As Single
Dim m(200000) As Single
Dim mz As String
Dim rel As String
Input "Digits of Pitch";ku
For jx=ku To 1 Step -1
    If jx=ku Then
       Input "The First Figure of Pitch";p(jx)
    Else
        Input "The Next";p(jx)
    End If
Next jx
Input "Ceiling of Digits (<99000)"; wl
Open "f:K-Data" For Output As #5
mz="Ceiling of Digits"
Print #5, mz
Print #5, wl
mz="Pitch = "
For jx=ku To 1 Step -1
    nz=p(jx)
    rel=Rel14(b_a)
    mz=mz+rel
Next jx
Print #5, mz
p(0)=ku
n(0)=1:n(1)=1
*inc
mz="a = "
For jx=1 to d(0)+2
    d(jx)=0
Next jx
d(0)=1:d(1)=0
n(1)=n(1)+2
wz=n(0)
For ix=1 to wz
    sz=Int(n(ix)/10)
    n(ix)=n(ix)-10*sz
    n(ix+1)=n(ix+1)+sz
Next ix
If n(wz+1)>0 Then
    n(0)=n(0)+1
End If
If n(0)>99000 Then
    Goto *EndEnd
End If
Print "a =";" ";
For jx=n(0) to 1 step -1
Print n(jx);
    nz=n(jx)
    rel=Rel14(b_a)
    mz=mz+rel
Next jx
Print " ";
For ix=0 to n(0)
    a(ix)=n(ix)
Next ix
*begin
If a(1) Mod 2 = 0 Then
    For iw=a(0) to 1 step -1
        tx=Int(a(iw)/2)
        ux=a(iw)/2-tx
        a(iw)=tx
        a(iw-1)=a(iw-1)+20*ux
    Next iw
    px=a(0)
    If a(px)=0 Then
        a(0)=a(0)-1
    End If
Else
    For ix=1 to a(0)
        For jx=1 to p(0)
            m(ix+jx-1)=m(ix+jx-1)+a(ix)*p(jx)
        Next jx
    Next ix
    m(1)=m(1)+1
mu=a(0)+p(0)
For jx=1 to mu-1
sx=Int(m(jx)/10)
m(jx+1)=m(jx+1)+sx
m(jx)=m(jx)-10*sx
Next jx
If m(mu)>0 Then
    m(0)=a(0)+p(0)
Else
    m(0)=a(0)+p(0)-1
End If
For jy=0 to m(0)
    a(jy)=m(jy)
Next jy
For jx=0 to mu+2
    m(jx)=0
Next jx
End If
If a(0)>wl Then
    Goto *outrange
End If
If a(0)=1 and a(1)=1 Then
    Goto *end
End If
If d(0)=1 and d(1)=0 Then
        Open "d:C-Type" For Output As #1
        For iz=0 to a(0)
        Print #1, a(iz)
        Next iz
    Close #1:Goto *pd
Else
    Open "d:C-Type" For Input As #3
End If
For ix=1 to e(0)+2
    e(ix)=0
Next ix
e(0)=1:e(1)=0
*again
```

```
For ix=0 to e(0)
    If e(ix)<>d(ix) Then
        Goto *input
    End If
Next ix
Close #3
Goto *dataup
*input
Input #3, nx
f(0)=nx
For ix=1 to nx
    Input #3, ny
    f(ix)=ny
Next ix
For jx=0 to nx
    If f(jx)<>a(jx) Then
        e(1)=e(1)+1
        For ix=1 to e(0)
            uz=Int(e(ix)/10)
            e(ix+1)=e(ix+1)+uz
            e(ix)=e(ix)-10*uz
        Next ix
        If uz>0 Then
            e(0)=e(0)+1
        End If
        goto *again
    End If
Next jx
Print "Circ."
Close #3
mz=mz+" Circ."
Goto *Stepup
*dataup
    Open "d:C-Type" For Append As #2
    For ix=0 to a(0)
        Print #2, a(ix)
    Next ix
Close #2
*pd
d(1)=d(1)+1
For iz=1 to d(0)
    tz=Int(d(iz)/10)
    d(iz+1)=d(iz+1)+tz
    d(iz)=d(iz)-10*tz
Next iz
If tz>0 Then
    d(0)=d(0)+1
End If
Goto *begin
*end
Print "End"
mz=mz+" End"
Goto *Stepup
*outrange
Print "Out of Range"
mz=mz+" Out of Range"
Goto *Stepup
*Stepup
Print #5, mz
kill "d:C-Type"
Goto *inc
*EndEnd
Print “EndEnd”
Print #5, “EndEnd”
Close #5
End
Function Rel14(ByRef b_a As Single)As String
    If nz=0 Then
        Rel14="0"
    ElseIf nz=1 Then
        Rel14="1"
    ElseIf nz=2 Then
        Rel14="2"
    ElseIf nz=3 Then
        Rel14="3"
    ElseIf nz=4 Then
        Rel14="4"
    ElseIf nz=5 Then
        Rel14="5"
    ElseIf nz=6 Then
        Rel14="6"
    ElseIf nz=7 Then
        Rel14="7"
    ElseIf nz=8 Then
        Rel14="8"
    ElseIf nz=9 Then
        Rel14="9"
End If
End Function
```

次のデータは pitch が 5 の場合である。a = 5 Circ. というのは, 5 が循環型であることを示している。a = 7 Out of Range というのは, 計算途中で 35 桁（Ceiling of Digits）を超えたという意味であり, おそらく発散型であると推定されるが, 断定できない。

Ceiling of Digits 35	a = 7 Out of Range	a = 15 End
Pitch = 5	a = 9 Out of Range	a = 17 Circ.
a = 3 End	a = 11 Out of Range	a = 19 End
a = 5 Circ.	a = 13 Circ.	a = 21 Out of Range

a = 23 Out of Range
a = 25 Out of Range
a = 27 Circ.
a = 29 Out of Range
a = 31 Out of Range
a = 33 Circ.
a = 35 Out of Range
a = 37 Out of Range
a = 39 Out of Range
a = 41 Out of Range
a = 43 Circ.
a = 45 Out of Range
a = 47 Out of Range
a = 49 Out of Range
a = 51 End
a = 53 Out of Range
a = 55 Out of Range
a = 57 Out of Range
a = 59 Out of Range
a = 61 Out of Range
a = 63 Out of Range
a = 65 End
a = 67 Out of Range
a = 69 Out of Range
a = 71 Out of Range
a = 73 Out of Range
a = 75 Out of Range
a = 77 Out of Range
a = 79 Out of Range
a = 81 Out of Range
a = 83 Circ.
a = 85 Out of Range
a = 87 Out of Range
a = 89 Out of Range
a = 91 Out of Range
a = 93 Out of Range
a = 95 Out of Range
a = 97 End
a = 99 Out of Range
a = 101 Out of Range
a = 103 Out of Range
a = 105 Circ.
a = 107 Out of Range
a = 109 Out of Range
a = 111 Out of Range
a = 113 Out of Range
a = 115 Out of Range
a = 117 Out of Range
a = 119 Out of Range
a = 121 Out of Range
a = 123 Out of Range
a = 125 Out of Range
a = 127 Out of Range
a = 129 Out of Range
a = 131 Out of Range
a = 133 Out of Range

次のデータは pitch が 7 の場合である。この範囲では循環型と判定されるものはない（実際はあるのかもしれないが)。

Ceiling of Digits 35
Pitch = 7
a = 3 Out of Range
a = 5 End
a = 7 Out of Range
a = 9 End
a = 11 Out of Range
a = 13 Out of Range
a = 15 Out of Range
a = 17 Out of Range
a = 19 Out of Range
a = 21 Out of Range
a = 23 Out of Range
a = 25 Out of Range
a = 27 Out of Range
a = 29 Out of Range
a = 31 Out of Range
a = 33 Out of Range
a = 35 Out of Range
a = 37 Out of Range
a = 39 Out of Range
a = 41 End
a = 43 Out of Range
a = 45 Out of Range
a = 47 Out of Range
a = 49 Out of Range
a = 51 Out of Range
a = 53 Out of Range
a = 55 Out of Range
a = 57 Out of Range
a = 59 Out of Range
a = 61 Out of Range
a = 63 Out of Range
a = 65 Out of Range
a = 67 Out of Range
a = 69 Out of Range
a = 71 Out of Range
a = 73 End
a = 75 Out of Range
a = 77 Out of Range
a = 79 Out of Range
a = 81 Out of Range
a = 83 Out of Range
a = 85 Out of Range
a = 87 Out of Range
a = 89 Out of Range
a = 91 Out of Range
a = 93 Out of Range
a = 95 Out of Range
a = 97 Out of Range
a = 99 Out of Range
a = 101 Out of Range
a = 103 Out of Range
a = 105 Out of Range
a = 107 Out of Range
a = 109 Out of Range
a = 111 Out of Range
a = 113 Out of Range
a = 115 Out of Range
a = 117 Out of Range

a = 119 Out of Range
a = 121 Out of Range
a = 123 Out of Range
a = 125 Out of Range
a = 127 Out of Range
a = 129 Out of Range
a = 131 Out of Range
a = 133 Out of Range

3. 一次式以外の場合

ここでは上の考え方をもう少し一般化してみる。$f(n)$ は正整数 n の関数で, n が奇数ならば $f(n)$ は偶数の正整数値をとるものとする。

正整数 a に対して,

$$a_1 = a, \qquad a_{n+1} = \begin{cases} f(a_n) & (a_n\text{が奇数}) \\ a_n/2 & (a_n\text{が偶数}) \end{cases}$$

によって数列 $\{a_n\}$ を定義する。

$f(n) = kn + 1$ の場合が前節で考えたケースであるが, 他にも関数 $f(n)$ の候補としては無限の可能性がある。

一例として $f(n) = n^2 - 1$ としてみると, 次の様なデータが得られる。今回は自乗という操作が含まれるので, Ceiling of Digits を 8000 に取ってある。

Ceiling of Digits 8000
a = 3 End
a = 5 End
a = 7 End
a = 9 End
a = 11 End
a = 13 Out of Range
a = 15 End
a = 17 End
a = 19 Out of Range
a = 21 Out of Range
a = 23 End
a = 25 Out of Range
a = 27 Out of Range
a = 29 Out of Range
a = 31 End
a = 33 End
a = 35 Out of Range
a = 37 Out of Range
a = 39 Out of Range
a = 41 Out of Range
a = 43 Out of Range
a = 45 Out of Range
a = 47 Out of Range
a = 49 Out of Range
a = 51 Out of Range
a = 53 Out of Range
a = 55 Out of Range
a = 57 Out of Range
a = 59 Out of Range
a = 61 Out of Range
a = 63 End
a = 65 End
a = 67 Out of Range
a = 69 Out of Range
a = 71 Out of Range
a = 73 Out of Range
a = 75 Out of Range
a = 77 Out of Range
a = 79 Out of Range
a = 81 Out of Range
a = 83 Out of Range
a = 85 Out of Range
a = 87 Out of Range
a = 89 Out of Range
a = 91 Out of Range
a = 93 Out of Range
a = 95 Out of Range
a = 97 Out of Range
a = 99 Out of Range
a = 101 Out of Range
a = 103 Out of Range
a = 105 Out of Range
a = 107 Out of Range
a = 109 Out of Range
a = 111 Out of Range
a = 113 Out of Range
a = 115 Out of Range
a = 117 Out of Range
a = 119 Out of Range
a = 121 Out of Range
a = 123 Out of Range
a = 125 Out of Range
a = 127 End
a = 129 End
a = 131 Out of Range
a = 133 Out of Range
a = 135 Out of Range
a = 137 Out of Range
a = 139 Out of Range
a = 141 Out of Range
a = 143 Out of Range
a = 145 Out of Range
a = 147 Out of Range
a = 149 Out of Range
a = 151 Out of Range
a = 153 Out of Range
a = 155 Out of Range
a = 157 Out of Range
a = 159 Out of Range
a = 161 Out of Range
a = 163 Out of Range
a = 165 Out of Range
a = 167 Out of Range
a = 169 Out of Range
a = 171 Out of Range
a = 173 Out of Range

a = 175 Out of Range	a = 179 Out of Range	a = 183 Out of Range
a = 177 Out of Range	a = 181 End	a = 185 Out of Range

このデータから次のことに気づく。

(1) $a = 2^r \pm 1$（r は正整数）の場合は, a は終了型である。

このことは,

$(2^r \pm 1)^2 - 1 = 2^{r+1}(2^{r-1} \pm 1)$

より明らかである。またこれより,

(2) $a^2 - 1 = 2^s(2^r \pm 1)$ （r, s は正整数）をみたす奇数 a は終了型である。

上のデータに現われている終了型の奇数は全てこの (1), (2) のタイプのいずれかに属するが, これ以外のタイプの終了型の奇数が存在するか否かはわからない。

(3) 循環型は見出されない（$a < 10000$ の範囲で）。理由は不明である。

類似の関数でも, $f(n) = n^2 + 1$ の場合は, $\{a_n\}$ の挙動は単純である。

a が 2 の冪乗の場合, 終了型であることは明らかである。それ以外の場合は, $\{a_n\}$ は 1 より大きい奇数を含む。$a_n = 2k + 1$ $(k \geq 1)$ が奇数ならば,

$a_{n+1} = 4(k^2 + k) + 2,$

$a_{n+2} = 2(k^2 + k) + 1,$

$a_{n+3} = k^2 \cdot a_{n+1} + (4k^3 + 6k^2 + 4k + 2)$

により, $\{a_n\}$ は発散する。

$f(n)$ が他の 2 次関数の場合, また更に高次の関数の場合どのような結果が得られるのか興味深いところであるが, 今後の研究を待ちたい。

4. 終わりに

Collatz 予想に反例が存在することは十分ありうることである。他方 Collatz 予想は正しいのであり, いつかそれが証明されるかもしれない。現状では証明の道筋すら見当がついていないということは, 我々の現在の数学体系には何かが欠落しているのかもしれない。何が欠落しているのかは勿論わからないわけであるが, 著者は次のように考えている。

次の 2 つの定理はよく知られているものである。

定理 A（Wedderburn の構造定理, [3] p. 152）

R は左イデアルに関して降鎖条件をみたす結合的環であるとする。ならば, 次は同値である。

(1) R は単純環である。

(2) R はある斜体 D 上の行列環と同型である。

定理 B（[4] p. 204）

S は左イデアルに関して降鎖条件をみたす半群であるとする。ならば, 次は同値である。

(1) S は完全 0− 単純半群である。

(2) S はある群 G 上の Rees 行列半群と同型である。

この 2 つの定理は互いに関係があるわけではない。定理 A は環のカテゴリーにおける定理であり, 定理 B は半群のカテゴリーにおける定理である。これら 2 つの定理の一方から他方が導かれるわけではない。しかし 2 つの定理の主張するところがよく似ているのは確かである。証明については, カテゴリーが異なるので似ているとは言えないが, 共通点はないでもない。そこで次のような想像をするのはあながち無理ではなかろう。

「未知の定理 X があって, 定理 A も定理 B も定理 X から導かれるのではないだろうか。」

愛知工業大学研究報告, 第 50 号, 平成 27 年, Vol.50, Mar. 2015

そのような定理 X が存在するとして, どのようなものかはわからない。しかしそのような定理は環や半群のカテゴリーを超えた, 我々が知らない「あるもの」に関する命題なのであろう。

Collatz 予想についても同様ではなかろうかと著者は想像している。

References

[1] 三室 智明, 西村 滋人, 平松 豊一: コラッツ予想について, http://www.media.hosei.ac.jp/bulletin/vol16-25.pdfni

[2] 和田秀男: 数の世界-整数論への道, 岩波書店 (1981)

[3] Anderson, F. W. and Fuller, K. R.: Rings and Categories of Modules, Springer-Verlag(1974)

[4] Ljapin, E. S.: Semigroups, Translations of Mathematical Monographs, No. 3, American Mathematical Society(1974)

（平成２７年３月１９日受理）