円管内乱流熱伝達について

渡辺　修・進藤益男

On the Turbulent Heat Transfer in Tubes

Osamu WATANABE, Masuo SHINDO

発達した円管内乱流に一様な熱流束が加わった場合の定常状態における熱伝達率の数値計算とそれに対応する実験を行い，両者を対比させた結果本報文の方法による数値計算はほぼ適当であることを認めた。また数値計算結果から温度助走区間におよぼすプラントル数とレイノルズ数の影響を検討した。

1. 緒　言

ボイラー，原子炉などのように熱の移動を伴う装置において，その熱伝達率を求めることは装置の設計上，また安全面からも最も基本的なことである。

一般に熱伝達率は熱的にも流体力学的にも発達した状態を考え，さらに定常状態に対して整理されているが，加熱管が短い場合においては温度助走区間における熱伝達率も求めることが必要になる。また原子炉などの事故時を想定した場合には熱的にも流体力学的にも非定常な領域を考えに入れなければ正確な状況の把握はできない。

最も基本的な流動形態の一つである円管内流れにおける熱伝達率の計算は層流に対してSiegel[1]が非定常熱伝達率の計算を行っており，乱流に対してはSparrow[2]らが壁面温度が変化する場合に対して行っている。

ここでは流体力学的にも熱的にも非定常な場合の熱伝達率の検討を行う第一段階として，発達した円管内乱流に管軸方向に一様な熱流束が加わった場合の定常状態における熱伝達率を著者の一人が低プラントル数の流体に対して行ったもの[3]と同様な方法で求め，一方作動流体として水を用いて実験を行い両者を比較検討する。

2. 理　論

座標系を図1のように置く。流体は左側から右側へ発

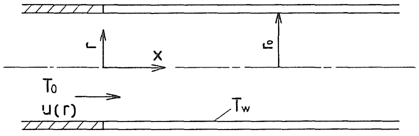

図1　座　標　系

達した乱流として流れる。入口温度T_0は一定であり，$x \geqq 0$の部分で一様な熱流束が加わるものとする。

エネルギー保存則を適用すると

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\,(\alpha+\varepsilon_H)\,\frac{\partial T}{\partial r}\right\} \tag{1}$$

ここでx方向への伝導伝熱の項，および粘性による消散エネルギーは省略してある。また流体の物性値は一定であると仮定している。

定常状態に対しては

$$u\,\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r(\alpha+\varepsilon_H)\frac{\partial T}{\partial r}\right\} \tag{2}$$

境界条件は加熱開始点，管壁，管中心において，それぞれ次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} &T\,(0,\ r) = T_0 \\ &\frac{\partial T}{\partial r}(x,\ r_0) = \frac{q}{k} \\ &\frac{\partial T}{\partial x}(x,\ 0) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

式(2)を無次元形で表わすと

$$\frac{u^+}{2}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^+} = \frac{r_0^+}{r^+}\,\frac{\partial}{\partial r^+}\left(r^+\gamma\,\frac{\partial\theta}{\partial r^+}\right) \tag{4}$$

ここで$\gamma = (\alpha+\varepsilon_H)/\nu = 1/P_r + \varepsilon_H/\nu$である。

同様に境界条件は

$$\left.\begin{aligned} &\theta\,(0,\ r^+) = 0 \\ &\frac{\partial\theta}{\partial r^+}(x^+,\ r_0^+) = \frac{1}{r_0^+} \\ &\frac{\partial\theta}{\partial r^+}(x^+,\ 0) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

式(4)のu^+は流れが完全に発達しているという仮定から

Spaldingの式[4]を用いて表わす。すなわち

$$y^+(u^+) = u^+ + A\left\{ \exp(Ku^+) - 1 - Ku^+ - \frac{1}{2}(Ku^+)^2 - \frac{1}{6}(Ku^+)^3 - \frac{1}{24}(Ku^+)^4 \right\} \quad (6)$$

ここでA, Kは次の値である。

A=0.0991, K=0.407

一方渦温度伝導度 ε_H は渦動粘性係数に等しいと仮定すると

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_H &= \varepsilon_M \\ \frac{\varepsilon_M}{\nu} &= \frac{1}{\partial u^+ / \partial y^+} - 1 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

結局問題は式(4)を式(6), (7)を用いて式(5)の境界条件のもとで解くことになるが，壁の近傍では $u^+ \sim y^+$ であり，壁から離れるにつれ $u^+ \simeq l_n y^+$ であることから，式(4)を差分方程式にする際に，独立変数 r^+ を u^+ に変換することにより精度を落とすことなく計算時間を短縮できると考えられる。

r^+ を u^+ に変換すると

$$\frac{u^+}{2r_0^+}\frac{\partial\theta}{\partial x^+} = \frac{1}{r^+(u^+)}\frac{1}{g(u^+)}\frac{\partial}{\partial u^+}\left\{\frac{r^+(u^+)\gamma}{g(u^+)}\frac{\partial\theta}{\partial u^+}\right\} \quad (8)$$

境界条件は

$$\left.\begin{aligned} &\theta\ (0,\ u^+) = 0 \\ &\frac{\partial\theta}{\partial u^+}\ (x^+,\ 0) = -\frac{1}{r_0^+} \\ &\frac{\partial\theta}{\partial u^+}(x^+,\ u_0^+) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

ここで

$$g(u^+) = \frac{dy^+}{du^+} \quad (10)$$

式(8)の係数は u^+ のみの関数であるのでこれらの関数を次式で表わす。

$$F(u^+) \equiv \frac{2r_0^+}{r^+(u^+)\ u^+ g(u^+)} \quad (11)$$

$$G(u^+) \equiv \frac{r^+(u^+)\ \gamma}{g(u^+)} \quad (12)$$

これから式(8)は

$$\frac{\partial\theta}{\partial x^+} = F(u^+)\left\{G\ (u^+)\ \frac{\partial\theta}{\partial u^+}\right\} \quad (13)$$

式(13)に陰伏的方法（implicit method）を適用すると

$$\frac{F_j G_{j+1/2}}{(\Delta u^+)^2}\theta_{i+1,\,j+1} - \left\{\frac{F_j}{(\Delta u^+)^2}\left(G_{j+1/2} + G_{j-1/2}\right) + \frac{1}{\Delta x^+}\right)\right\}\theta_{i+1,\,j} + \frac{F_j G_{j-1/2}}{(\Delta u^+)^2}\theta_{i+1,\,j-1} = -\frac{1}{\Delta x^+}\theta_{i,\,j} \quad (14)$$

ただし，i ，j はそれぞれ x^+, u^+ 方向（y^+ 方向）の格子点番号である。

式(14)により x^+ での温度分布から $x^+ + \Delta x^+$ での温度分布が計算でき，これにより次式で定義される熱伝達率，ヌセルト数が計算できる。

$$h = \frac{q}{T_w - T_b}$$

$$N_u = \frac{hd}{k}$$

ここで混合平均温度 T_b は

$$T_b = \frac{\int_0^{r_0} Tu2\pi r dr}{\int_0^{r_0} u2\pi r dr}$$

である。

3. 実験装置および実験方法

実験装置の概略図を図2に示す。テスト部①は空気中においた内径14mm，肉厚0.5 mmのステンレス管で両端に540mmの間隔をおいて電極が取り付けてある。また，壁面温度を測定するために直径 0.3mmの銅・コンスタンタン熱電対が外壁から 0.3mmの位置に管軸方向に7本付けてある。テスト部の加熱はバッテリーおよびトランジスタ回路によって制御された電流をステンレス管に直接通電することによって行い，壁面温度は熱電対の出力を冷接点を経て直接レコーダーに入れ連続記録する。また，外気の流動を防ぐためテスト部はアクリル板で囲んである。

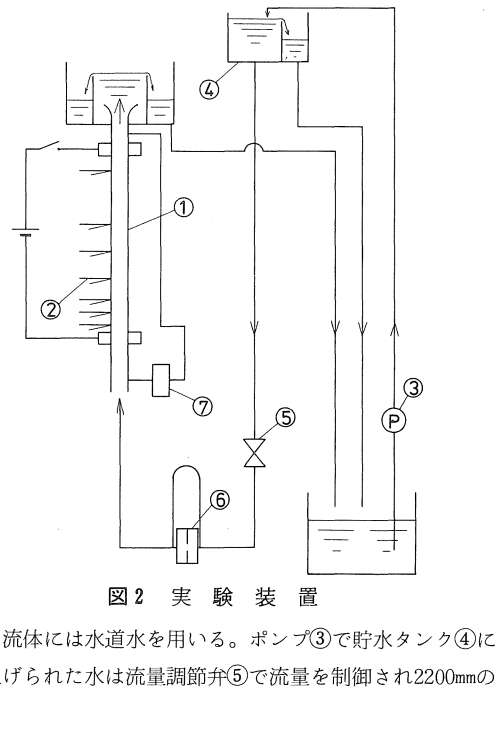

図2　実験装置

流体には水道水を用いる。ポンプ③で貯水タンク④に上げられた水は流量調節弁⑤で流量を制御され2200mmの

助走区間を通ってテスト部①に流入する。流量の測定にはオリフィス⑥を用いる。また，流動状況の確認のために差圧計⑦を用いてテスト部両端の圧力損失を測定する。

実験は熱流束6.4 $\times 10^3$ Kcal/m²h，入口水温10℃，レイノルズ数2250～8640の条件のもとに行った。

なお，外気への損失熱は円柱面からの自然対流熱伝達の計算を適用した結果非常に小さいので無視する。

3．計算結果

図3に局所ヌセルト数の計算結果の一例を示す。ここでプラントル数Pr＝ 0.7，レイノルズ数Re＝10^4，2×10^4，5×10^4，10^5である。またこの時の計算条件は半径方向の格子点の数は21，軸方向のきざみΔx^+＝ 0.1である。なお格子点を51にした場合も行ったが結果はほとんど変わらなかった。

また，x^+＝3.0，10.0，20.0における半径方向の温度分布の計算結果を図4，図5にそれぞれPr＝ 1.0， 5.0，Re＝ 10^4に対して示す。プラントル数が大きい場合には

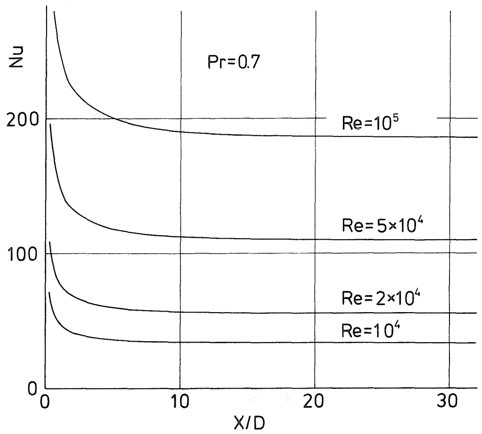

図3　局所ヌセルト数の計算例

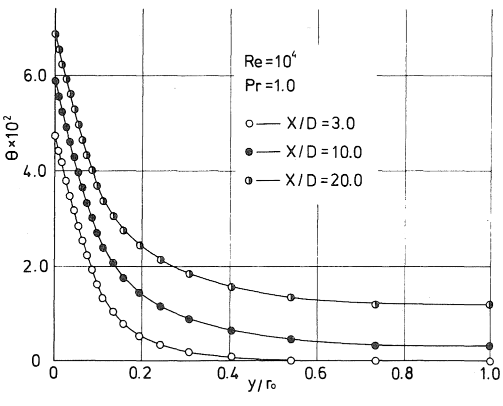

図4　半径方向温度分布　Pr＝1.0

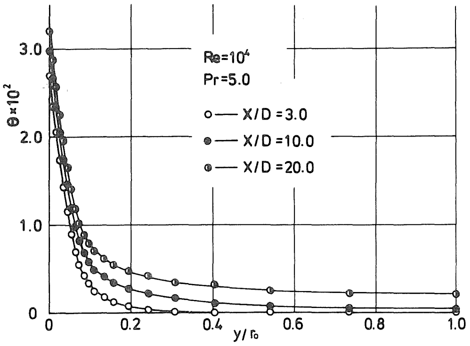

図5　半径方向温度分布　Pr＝5.0

壁近傍での温度勾配が急になり，温度境界層が小さくなることがわかる。

発達した領域におけるヌセルト数の計算結果を一般に用いられているコルバーンの式[5]

$$Nu_\infty = 0.023Re^{0.8}Pr^{1/3} \qquad (15)$$

または同様な式

$$Nu_\infty = 0.023Re^{0.8}Pr^{0.4} \qquad (16)$$

と比較したものを図6にレイノルズ数に対して，図7にプラントル数に対して示す。これらの図から発達した領域における計算値はほぼ妥当であると推察されるが，式(15)と式(16)は等温壁に対するものであるためはっきりした関係は言えない。

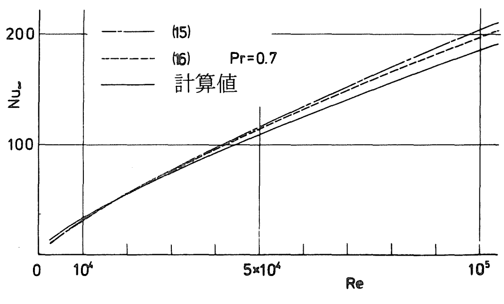

図6　Nu_∞の 計 算 値

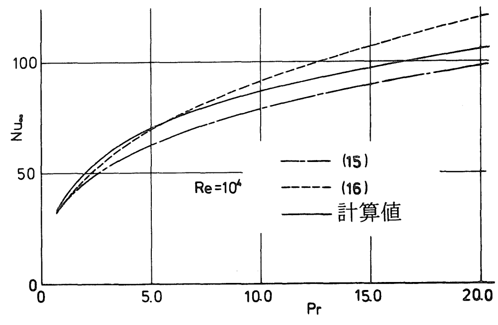

図7　Nu_∞の 計 算 値

次に図8～11にNu/Nu_∞の値を示す。図8はプラントル数の影響を示すものであり，この図からプラントル数の増大に伴い温度助走区間は小さくなるがPr＝10以上ではほとんど変化がなくなることがわかる。また図9～11にそれぞれPr＝0.7，5，10におけるレイノルズ数の影響を示す。プラントル数が小さい時にはレイノルズ数の影響は小さく，プラントル数が大きくなるにつれてレイノルズ数の影響が大きくなり温度助走区間が短くなることがわかるがいずれの場合もRe＝5×10^4以上ではほとんど変化がないことがわかる。

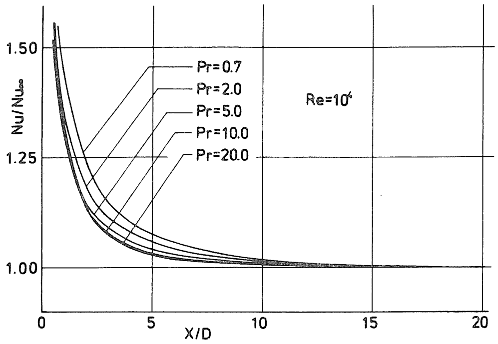

図8　局所ヌセルト数（プラントル数の影響）

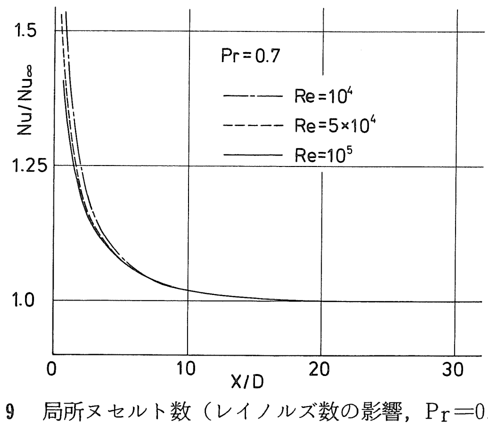

図9　局所ヌセルト数（レイノルズ数の影響，Pr＝0.7）

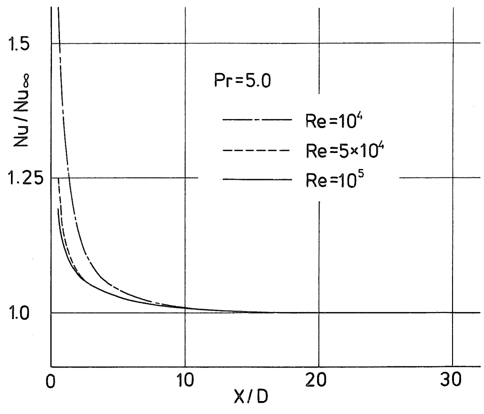

図10　局所ヌセルト数(レイノルズ数の影響，Pr＝5.0)

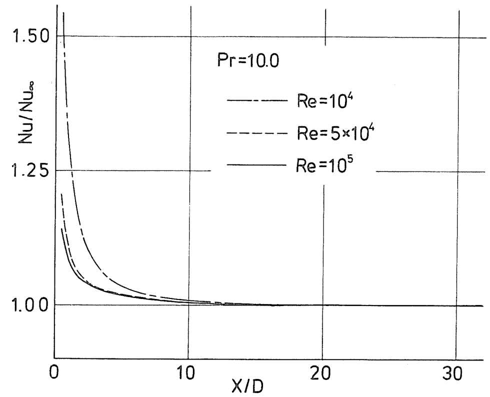

図11　局所ヌセルト数(レイノルズ数の影響，Pr＝10.0)

4．実験結果および計算値との比較

図12に実験により求めた局所ヌセルト数をRe＝2700，5500，8640について数値計算の結果とともに示す。ヌセルト数を算出する際の混合平均温度T_bは次式によって求めた。

$$T_b(x) = \frac{2\pi r_0\ q}{c_p\ G}x + T_0 \tag{17}$$

本図から局所ヌセルト数はレイノルズ数が小さい領域においてはよく一致しているが，レイノルズ数の増大に伴い全体に実験値の方が大きな値を示す結果となった。

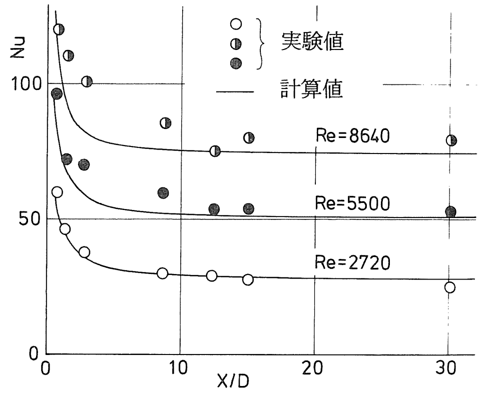

図12　局所ヌセルト数の実験結果

また図13に発達した領域における（x^+＝30.0）ヌセルト数の値を数値計算の結果とともに示す。実験値と計算値は約7％以内の範囲で一致しているがやはり全体的に実験値の方が大きな値を示していることがわかる。

以上の相違の原因としては，理論面からは速度分布として用いた式(6)が管中心において$du/dr=0$なる条件を満たしていないこと，および渦温度伝導度として式(7)を用いたことの二点が考えられ，一方実験値も特に図12

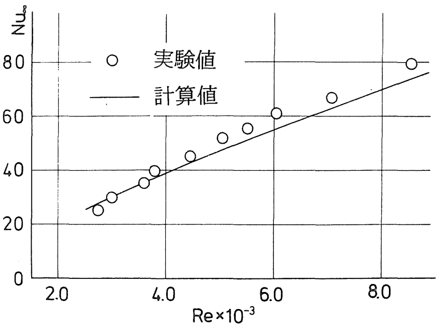

図13　Nu の実験結果

の局所ヌセルト数が大きなレイノルズ数においてかなりのばらつきがあることと，物性値を入口温度におけるものを用いて一定であるとした仮定がありいずれによってこの違いが現われたかは現在の段階では断定できない。しかしながら全般を通してみれば本計算は少なくとも10%以内の精度でよく実験値と一致しているものと結論できる。

5．結　言

円管内の非定常流れ場における非定常熱伝達の研究の第一段階として円管内乱流に管軸方向に一様な熱流束が加わる場合の実験とそれに対応する熱伝達率の数値計算を行い，両者を対比させて次のような結果を認めた。

(1)　この報文の方法による数値計算の結果は実験との対比によりほぼ適当であると推察される。

(2)数値計算結果から温度助走区間はプラントル数の増大に伴い短くなり，Pr＝10以上ではほとんど変化がない。またレイノルズ数はプラントル数が小さい時にはあまり大きな要因とならないが，プラントル数の増大に伴い温度助走区間に大きな影響をおよぼすようになる。

なお数値計算には本学電子計算機センターのFACOM 230－25を使用したことを附記する。

記号

ρ ：密度

c_p ：定圧比熱

T ：流体の温度

t ：時間

q ：熱流束

u ：速度

T_o ：$x=0$ における流体温度

T_w ：壁温

T_b ：混合平均温度

r ：管中心から測った半径座標

r_o ：管半径　$d=2r_o$

x ：加熱開始点から測った管軸方向座標

y ：管壁から測った半径座標

ε_M ：渦動粘性係数

ε_H ：渦温度伝導度

τ ：壁面せん断応力

ν ：動粘性係数

h ：熱伝達率

α ：温度伝導度

k ：熱伝導度

Pr ：プラントル数

Re ：レイノルズ数

Nu ：局所ヌセルト数

Nu_∞ ：発達した位置におけるヌセルト数

x^+ ：無次元軸方向距離 x/d

y^+ ：壁面から測った無次元半径方向距離 $y\sqrt{\tau_w/\rho}/\nu$

r^+ ：中心から測った無次元半径方向距離 $r\sqrt{\tau_w/\rho}/\nu$

u^+ ：無次元速度 $u/\sqrt{\tau_w/\rho}$

θ ：無次元温度 $(T-T_o)/(qr_o/k)$

u_o^+ ：管中心における無次元速度

参考文献

(1) R. Siegel, Trans. ASME Ser. C, (1960), 241

(2) E. M. Sparrow, R. Siegel, Trans. ASME Ser. C. (1960), 170

(3) T. Miyasugi, M. Akimoto, H. Wakui, M. Shindo, Bull. Tokyo Institute of Technology, No. 90, (1969), 51

(4) D. B. Spalding, Int. Develop. Heat Transfer, (1961), 439, ASME

(5) 例えば，甲藤好郎，伝熱概論，養賢堂

(6) 日本機械学会，伝熱工学資料