半無限弾性地盤上の２つの基礎の地震応答

その４．積分方程式の解析

中　村　満　喜　男

Seismic Response of Two Foundations on an Elastic Half Space

Part 4. Analysis of Integral Equation

Makio NAKAMURA

The dynamic interaction problem of the foundation-soil system is investigated under mixed boundary conditions, and specially the analysis of the integral equation is expressed in detail. The first Fredholm's integral equation is obtained using the Green's function and solved using the Galerkin's approximation method. The elements of matrix equation are solved by contour integral on the complex plane, and the results of the analysis are expressed by complicated equations including infinite integral along the imaginary axis.

１．まえがき

本論文は同題の前論文に引き続き，主に積分方程式の解析法について述べたものである。筆者はすでに入射波として上下動のみを考慮し，２つの基礎の大きさが同じ非常に簡素化された基礎—地盤系の相互作用の問題を，波動方程式の混合境界値問題として解析した。[1),2)]採用された方法は２つの基礎下の応力度分布をChebyshevの多項式で展開し，得られた積分方程式をそれらの係数を未知量とするマトリックス方程式に変換して解析を進めると言う方法である。すなわちFredholmの第１種積分方程式はGalerkinの近似解法を使って解かれ，数値計算が行われ，この方法が非常に明快で有効な方法であると言う結論が得られている。本論文においても全く同様の方法によって解析が行われている。しかし本論文は簡素化された基礎—地盤応答系と言う条件をはずすと言う目的にそって定められた次の３つの項目の一般化を行って解析を進めている。

1. 入射波として上下動成分に加えて水平動成分を考慮に入れた。
2. 基礎のスウェイング振動とロッキング振動を考慮に入れた。
3. ２つの基礎の大きさに違いがある場合を考慮に入れた。

この一般化された基礎—地盤応答系の振動方程式を求める段階では前論文[1),2)]より若干複雑となっているが，本質的な解析の違いは見当らない。しかし本論の様に波動方程式の混合境界値問題を解く段階になると，複素平面上の周辺積分に関し真に複雑な解析が必要となる。最終的に解かれるべきマトリックス方程式のマトリックス要素の計算は，要素の数が増加するだけではなく，無限積分等の計算も必要となり，数値計算の段階での困難が予想される。式の途中の展開を示すと煩雑となるので，丁寧さに欠けるきらいもあるが簡潔に表現する事にする。

理想的には３次元における波動方程式の混合境界値問題が解かれなければならないが，この様な２次元問題として得られる結果が工学的に利用され得る範囲は広いと考えられる。数値計算によって得られる，各パラメーター間の相互作用・カップリングの現象等については機会をあらためて検討する。

２．積分方程式の解法

①～⑩の混合境界値問題はグリーン関数の方法を使って未知応力度 $\sigma_n(x)\cdot\tau_n(x)$ を含む積分方程式によって表わされる。Lambは $x=0$，$y=0$ に生ずるＱの大きさの鉛直line荷重による地表面の任意の点の鉛直変位と水平変位を次の様に示している。[3),4),5)]

$$\left\{\begin{aligned} V_{Q=1}(X) &= \frac{1}{2\pi\mu}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K_\beta^2\cdot\alpha}{F(k)}\cdot e^{ikX}\,dk \\ U_{Q=1}(x) &= \frac{i}{2\pi\mu}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K\cdot G(k)}{F(k)}\cdot e^{ikX}\,dk \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

Pの大きさの水平line荷重による鉛直変位と水平変位は次式で示されている。[3),4),5)]

$$
\begin{cases}
V_{P=1}(X)=\dfrac{-i}{2\pi\mu}\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\cdot G(k)}{F(k)}\cdot e^{ikX}\,dk \\
U_{P=1}(X)=\dfrac{1}{2\pi\mu}\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_\beta{}^2\cdot\beta}{F(k)}\cdot e^{ikX}\,dk
\end{cases} \tag{2}
$$

ここに

$$
\begin{cases}
F(k)=(2k^2-k_\beta{}^2)-4k^2\cdot\alpha\cdot\beta \quad \text{Rayleigh 関数} \\
G(k)=2k^2-k_\beta{}^2-2\alpha\cdot\beta \\
\alpha^2=k^2-k_\alpha{}^2 \quad k_\alpha{}^2=\omega^2/c_1{}^2 \\
\beta^2=k^2-k_\beta{}^2 \quad k_\beta{}^2=\omega^2/c_2{}^2 \\
c_1=\{(\lambda+2\mu)/\rho\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{圧縮波速度} \\
c_2=\{\mu/\rho\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{せん断波速度} \\
k：\text{波数} \quad k_\alpha,\ k_\beta：\text{分岐点} \\
k_R：F(k)=0\ \text{の根で Rayleigh Point}
\end{cases}
$$

式(1)・(2)をグリーン関数として使うと，波動方程式の①～⑩の混合境界値問題は次の非同時連立積分方程式を満さなければならない。

$$
\begin{cases}
\displaystyle\int_{-(a+2b)}^{-a}\Phi_n(\Xi)\cdot V_{Q=1}(X-\Xi)\cdot d\Xi+\int_a^{(a+2\eta b)}\Phi_n(\Xi)\cdot V_{Q=1}(X-\Xi)\cdot d\Xi+\int_{-(a+2b)}^{-a}T_n(\Xi)\cdot V_{P=1}(X-\Xi)\cdot d\Xi+\int_a^{(a+2\eta b)}T_n(\Xi)\cdot V_{P=1}(X-\Xi)\cdot d\Xi=V^n(X) \\
\displaystyle\int_{-(a+2b)}^{-a}\Phi_n(\Xi)\cdot U_{Q=1}(X-\Xi)\cdot d\Xi+\int_a^{(a+2\eta b)}\Phi_n(\Xi)\cdot U_{Q=1}(X-\Xi)\cdot d\Xi+\int_{-(a+2b)}^{-a}T_n(\Xi)\cdot U_{P=1}(X-\Xi)\cdot d\Xi+\int_a^{(a+2\eta b)}T_n(\Xi)\cdot U_{P=1}(X-\Xi)\cdot d\Xi=U^n(X) \\
-(a+2b)\leqq X\leqq -a,\quad a\leqq X\leqq(a+2\eta b),\quad n=1\sim10
\end{cases} \tag{3}
$$

上式の無次元表示をする為に $\xi=\Xi/b$ の無次元量を導入し，$\Phi_n(X)\cdot T_n(X)$ の無次元表示が $\sigma_n(x)\cdot\tau_n(x)$ であり，$V^n(X)\cdot U^n(X)$ が①～⑩の混合境界値問題における基礎A・Bの鉛直変位と水平変位を示している事に注意すると，式(3)より次式が得られる。

$$
\begin{cases}
\displaystyle\int_{-(\zeta+2)}^{-\zeta}\sigma_n(\xi)\cdot v_Q(x-\xi)\cdot d\xi+\int_\zeta^{(\zeta+2\eta)}\sigma_n(\xi)\cdot v_Q(x-\xi)\cdot d\xi+\int_{-(\zeta+2)}^{-\zeta}\tau_n(\xi)\cdot v_P(x-\xi)\cdot d\xi+\int_\zeta^{(\zeta+2\eta)}\tau_n(\xi)\cdot v_P(x-\xi)\cdot d\xi=v^n(x) \\
\displaystyle\int_{-(\zeta+2)}^{-\zeta}\sigma_n(\xi)\cdot u_Q(x-\xi)\cdot d\xi+\int_\zeta^{(\zeta+2\eta)}\sigma_n(\xi)\cdot u_Q(x-\xi)\cdot d\xi+\int_{-(\zeta+2)}^{-\zeta}\tau_n(\xi)\cdot u_P(x-\xi)\cdot d\xi+\int_\zeta^{(\zeta+2\eta)}\tau_n(\xi)\cdot u_P(x-\xi)\cdot d\xi=u^n(x) \\
-(\zeta+2)\leqq x\leqq-\zeta,\quad \zeta\leqq x\leqq(\zeta+2\eta),\quad n=1\sim10
\end{cases} \tag{4}
$$

但し，$v_{Q\ or\ P}(x)=V_{Q=1\ or\ P=1}(X)\cdot\mu$

$u_{Q\ or\ P}(x)=U_{Q=1\ or\ P=1}(X)\cdot\mu$

$v_{Q\ or\ P}\cdot u_{Q\ or\ P}$：無次元量

上式は式全体が無次元量によって表示されており，基礎A・Bの底面の未知応力度 $\sigma_n(x)\cdot\tau_n(x)$ に関する連立の Fredholm 第1積分方程式である。上式を直接解いて未知応力度を求める事は不可能であるから，$\sigma_n(x)\cdot\tau_n(x)$ を次の様に展開しその係数を求めるべき未知量とする。

$$
\sigma_n(x)=\begin{cases}
\displaystyle\sum_{l=0}^{L}{}_AC_l^n\cdot\{1-(x+\zeta+1)^2\}^{-\frac{1}{2}}\cdot T_l(x+\zeta+1) & -(\zeta+2)\leqq x\leqq-\zeta \\
\displaystyle\sum_{l=0}^{L}{}_BC_l^n\cdot\left\{1-\left(\frac{x-\zeta-\eta}{\eta}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot T_l\left(\frac{x-\zeta-\eta}{\eta}\right) & \zeta\leqq x\leqq(\zeta+2\eta)
\end{cases}
$$

$$
\tau_n(x)=\begin{cases}
\displaystyle\sum_{l=0}^{L}{}_AD_l^n\cdot\{1-(x+\zeta+1)^2\}^{-\frac{1}{2}}\cdot T_l(x+\zeta+1) & -(\zeta+2)\leqq x\leqq-\zeta \\
\displaystyle\sum_{l=0}^{L}{}_BD_l^n\cdot\left\{1-\left(\frac{x-\zeta-\eta}{\eta}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot T_l\left(\frac{x-\zeta-\eta}{\eta}\right) & \zeta\leqq x\leqq(\zeta+2\eta)
\end{cases}
$$

但し，$n=1\sim10$ (5)

上式における $T_l(x)$ は Chebyshev の多項式である。[6)] ①～⑩の混合境界値問題に対して $\sigma_n(x)\cdot\tau_n(x)$ を決定するには，式(5)の未知係数 ${}_{A\ or\ B}C_l^n\cdot{}_{A\ or\ B}D_l^n$ が求められれば良い。式(4)に式(1)・(2)・(5)の関係を代入し若干の整理を行うと次式が得られる。

$$
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{l=0}^{L}\Big[{}_AC_l^n\cdot\frac{(-i)^l}{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_\beta{}^2\cdot\alpha}{F(k)}\cdot J_l(kb)\cdot e^{ikb(x+\zeta+1)}\,dk+{}_BC_l^n\cdot\frac{(-i)^l\cdot\eta}{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_\beta{}^2\cdot\alpha}{F(k)}\cdot J_l(\eta\cdot kb)\cdot e^{ikb(x-\zeta-\eta)}\,dk \\
\displaystyle\quad+{}_AD_l^n\cdot\frac{(-i)^{l+1}}{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\cdot G(k)}{F(k)}\cdot J_l(kb)\cdot e^{ikb(x+\zeta+1)}\,dk+{}_BD_l^n\cdot\frac{(-i)^{l+1}\cdot\eta}{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\cdot G(k)}{F(k)}\cdot J_l(\eta\cdot kb)\cdot e^{ikb(x-\zeta-\eta)}\,dk\Big]=v^n(x) \\
\displaystyle\sum_{l=0}^{L}\Big[{}_AC_l^n\cdot\frac{-(-i)^{l+1}}{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\cdot G(k)}{F(k)}\cdot J_l(kb)\cdot e^{ikb(x+\zeta+1)}\,dk+{}_BC_l^n\cdot\frac{-(-i)^{l+1}\cdot\eta}{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\cdot G(k)}{F(k)}\cdot J_l(\eta\cdot kb)
\end{cases}
$$

$$\left.\begin{array}{l}\cdot e^{ikb(x-\zeta-\eta)}\,dk+{}_{A}D_l^n\cdot\dfrac{(-i)^l}{2}\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_\beta{}^2\cdot\beta}{F(k)}\cdot J_l(kb)\cdot\\ \cdot e^{ikb(x+\zeta+1)}\,dk+{}_{B}D_l^n\cdot\dfrac{(-i)^l\cdot\eta}{2}\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_\beta{}^2\cdot\beta}{F(k)}\cdot\\ \cdot J_l(\eta\cdot kb)\cdot e^{ikb(x-\zeta-\eta)}\,dk\Big]=u^n(x)\\ -(\zeta+2)\leqq x\leqq-\zeta\qquad \zeta\leqq x\leqq(\zeta+2\eta)\end{array}\right. \qquad (6)$$

$J_l(\ )$：第1種 l 次 Bessel 関数

式(6)の第1・第2式の両辺に$\{1-(x+\zeta+1)^2\}^{-\frac{1}{2}}\cdot T_m(x+\zeta+1)$ を掛けて $-(\zeta+2)\leqq x\leqq-\zeta$の範囲で積分を行う。次に式(6)の第1・第2式の両辺に $\{1-((x-\zeta-\eta)/\eta)^2\}^{-\frac{1}{2}}\cdot T_m((x-\zeta-\eta)/\eta)$ を掛けて $\zeta\leqq x\leqq(\zeta+\cdot 2\eta)$ の範囲で積分を行い，整理すると次式が得られる。

$$\sum_{l=0}^{L}\Big[{}_ja_{ml}\cdot{}_AC_l^n+{}_jb_{ml}\cdot{}_BC_l^n+{}_je_{ml}\cdot{}_AD_l^n+{}_jf_{ml}\cdot{}_BD_l^n\Big]={}_jE_{n,m}$$
$$j=1\sim4\qquad l,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L$$
$$n=1\sim10 \qquad (7)$$

但し ${}_ja_{ml}\cdot{}_jb_{ml}\cdot{}_je_{ml}\cdot{}_jf_{ml}$ は次式によって表わされる。

$$\left\{\begin{array}{l}{}_1a_{ml}=(-i)^{l+m}\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_\beta{}^2\cdot\alpha}{F(k)}\cdot J_l(kb)\cdot J_m(-kb)\,dk\\ {}_1b_{ml}=(-i)^{l+m}\cdot\eta\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_\beta{}^2\cdot\alpha}{F(k)}\cdot J_l(\eta\cdot kb)\\ \qquad\cdot J_m(-kb)\cdot e^{-ikb(2\zeta+\eta+1)}\,dk\\ {}_1e_{ml}=(-i)^{l+m+1}\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\cdot G(k)}{F(k)}\cdot J_l(kb)\cdot J_m(-kb)\,dk\\ {}_1f_{ml}=(-i)^{l+m+1}\cdot\eta\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\cdot G(k)}{F(k)}\cdot J_l(\eta\cdot kb)\cdot J_m(-kb)\\ \qquad\cdot e^{-ikb(2\zeta+\eta+1)}\,dk\end{array}\right. \qquad (8\cdot a)$$

$$\left\{\begin{array}{l}{}_2a_{ml}=(-i)^{l+m}\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_\beta{}^2\cdot\alpha}{F(k)}\cdot J_l(kb)\cdot J_m(-\eta\cdot kb)\\ \qquad\cdot e^{ikb(2\zeta+\eta+1)}\,dk\\ {}_2b_{ml}=(-i)^{l+m}\cdot\eta\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_\beta{}^2\cdot\alpha}{F(k)}\cdot J_l(\eta\cdot kb)\cdot J_m(-\eta\cdot kb)\,dk\\ {}_2e_{ml}=(-i)^{l+m+1}\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\cdot G(k)}{F(k)}\cdot J_l(kb)\cdot J_m(-\eta\cdot kb)\\ \qquad\cdot e^{ikb(2\zeta+\eta+1)}\,dk\\ {}_2f_{ml}=(-i)^{l+m+1}\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\cdot G(k)}{F(k)}\cdot J_l(\eta\cdot kb)\\ \qquad\cdot J_m(-\eta\cdot kb)\,dk\end{array}\right. \qquad (8\cdot b)$$

$$\left\{\begin{array}{l}{}_3a_{ml}=-(-i)^{l+m+1}\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\cdot G(k)}{F(k)}\cdot J_l(kb)\\ \qquad\cdot J_m(-kb)\,dk\\ {}_3b_{ml}=-(-i)^{l+m+1}\cdot\eta\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\cdot G(k)}{F(k)}\cdot J_l(\eta\cdot kb)\\ \qquad\cdot J_m(-kb)\cdot e^{-ikb(2\zeta+\eta+1)}\,dk\\ {}_3e_{ml}=(-i)^{l+m}\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_\beta{}^2\cdot\beta}{F(k)}\cdot J_l(kb)\cdot J_m(-kb)\,dk\\ {}_3f_{ml}=(-i)^{l+m}\cdot\eta\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_\beta{}^2\cdot\beta}{F(k)}\cdot J_l(\eta\cdot kb)\cdot J_m(-kb)\\ \qquad\cdot e^{-ikb(2\zeta+\eta+1)}\,dk\end{array}\right. \qquad (8\cdot c)$$

$$\left\{\begin{array}{l}{}_4a_{ml}=-(-i)^{l+m+1}\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\cdot G(k)}{F(k)}\cdot J_l(kb)\\ \qquad\cdot J_m(-\eta\cdot kb)\cdot e^{ikb(2\zeta+\eta+1)}\,dk\\ {}_4b_{ml}=-(-i)^{l+m+1}\cdot\eta\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\cdot G(k)}{F(k)}\cdot J_l(\eta\cdot kb)\\ \qquad\cdot J_m(-\eta\cdot kb)\,dk\\ {}_4e_{ml}=(-i)^{l+m}\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_\beta{}^2\cdot\beta}{F(k)}\cdot J_l(kb)\\ \qquad\cdot J_m(-\eta\cdot kb)\cdot e^{ikb(2\zeta+\eta+1)}\,dk\\ {}_4f_{ml}=(-i)^{l+m}\cdot\eta\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_\beta{}^2\cdot\beta}{F(k)}\cdot J_l(\eta\cdot kb)\\ \qquad\cdot J_m(-\eta\cdot kb)\,dk\end{array}\right. \qquad (8\cdot d)$$

$$\left\{\begin{array}{l}{}_1E_{n,m}=\dfrac{2}{\pi}\cdot\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-\theta^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot T_m(\theta)\cdot v^n(\theta-\zeta-1)\,d\theta\\ {}_2E_{n,m}=\dfrac{2}{\pi}\cdot\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-\theta^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot T_m(\theta)\cdot v^n(\eta\theta+\zeta+\eta)\,d\theta\\ {}_3E_{n,m}=\dfrac{2}{\pi}\cdot\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-\theta^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot T_m(\theta)\cdot u^n(\theta-\zeta-1)\,d\theta\\ {}_4E_{n,m}=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-\theta^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot T_m(\theta)\cdot u^n(\eta\theta+\zeta+\eta)\,d\theta\end{array}\right. \qquad (8\cdot e)$$

式(7)はマトリックス方程式として表現することが出来，次式が得られる。

$$\begin{bmatrix}[{}_1a_{ml}] & [{}_1b_{ml}] & [{}_1e_{ml}] & [{}_1f_{ml}]\\ [{}_2a_{ml}] & [{}_2b_{ml}] & [{}_2e_{ml}] & [{}_2f_{ml}]\\ [{}_3a_{ml}] & [{}_3b_{ml}] & [{}_3e_{ml}] & [{}_3f_{ml}]\\ [{}_4a_{ml}] & [{}_4b_{ml}] & [{}_4e_{ml}] & [{}_4f_{ml}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{{}_AC_l^n\}\\ \{{}_BC_l^n\}\\ \{{}_AD_l^n\}\\ \{{}_BD_l^n\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{{}_1E_{n,l}\}\\ \{{}_2E_{n,l}\}\\ \{{}_3E_{n,l}\}\\ \{{}_4E_{n,l}\}\end{Bmatrix} \qquad (9)$$

但しm，$l=0,\ 1,\ \cdots,\ L$　$n=1,\ \cdots,\ 10$

式(9)の部分マトリックス〔$_j a_{ml}$〕・〔$_j b_{ml}$〕・〔$_j e_{ml}$〕・〔$_j f_{ml}$〕は（L＋1）×（L＋1）の正方マトリックスであり，その要素は式(8・a)～(8・d)から計算され得る。従って式(9)の左辺の係数マトリックスは4（L＋1）×4（L＋1）のマトリックスであり，係数マトリックスの逆マトリックスが存在すれば未知ベクトル{$_{A\ or\ B}C^n_l$}・{$_{A\ or\ B}D^n_l$}は容易に求めることが出来，次の様に表わすことが出来る。

$$[C_{coeff}]\cdot\begin{Bmatrix}C^n\\D^n\end{Bmatrix}=\{E_n\}\rightarrow\begin{Bmatrix}C^n\\D^n\end{Bmatrix}=[C_{coeff}]^{-1}\cdot\{E^n\} \tag{10}$$

上式で注意すべきは，係数マトリックス〔Ccoeff〕がnすなわち①～⑩の混合境界値問題に対し共通である為，一度だけ計算を行っておけば良い事である。係数マトリックスの要素は複素数となるから，式(10)において複素マトリックスの逆マトリックスを求める事が必要となる。式(10)より{C^n}・{D^n}が得られると，式(5)によって応力度 $\sigma_n(x)$・$\tau_n(x)$ が得られ，この問題は解けた事になる。従って以下において式(10)の係数マトリックス〔Ccoeff〕の性質とその要素の計算及び{E_n}の計算について述べる事にする。

3.　係数マトリックスの要素の計算

式(8・a)～(8・d)よりすべての要素を計算すれば良いのであるが，出来るだけ余分な計算を省く為に，各部分マトリックス間に特別な関係があるものについてはその関係を明らかにする事が必要である。各部分マトリックスの要素の積分表示が似ているものを取り出し，検討を加える。途中の計算は一切省略して結果のみを示すと次の関係が得られる。

$$\left\{\begin{array}{l}[{}_2a_{ml}]=\dfrac{1}{\eta}[{}_1b_{ml}]^T\\[2mm] [{}_3a_{ml}]=-[{}_1e_{ml}]\\ [{}_3b_{ml}]=-[{}_1f_{ml}]\\ [{}_4a_{ml}]=-[{}_2e_{ml}]\\ [{}_4b_{ml}]=-[{}_2f_{ml}]\\[2mm] [{}_2e_{ml}]=-\dfrac{1}{\eta}[{}_1f_{ml}]^T\\[2mm] [{}_4e_{ml}]=\dfrac{1}{\eta}[{}_3f_{ml}]^T\end{array}\right. \tag{11}$$

但し，〔　〕^{T}：転置行列を表わす。

上式の関係を式(9)の係数マトリックスに代入すると次式が得られる。

$$[C_{coeff}]=\begin{bmatrix}[A_1] & [B_1] & [E_1] & [F_1]\\ \dfrac{1}{\eta}[B_1]^T & [B_2] & -\dfrac{1}{\eta}[F_1]^T & [F_2]\\ -[E_1] & -[F_1] & [E_3] & [F_3]\\ \dfrac{1}{\eta}[F_1]^T & -[F_2] & \dfrac{1}{\eta}[F_3]^T & [F_4]\end{bmatrix} \tag{12}$$

但し〔A_j〕・〔B_j〕・〔E_j〕・〔F_j〕は$_j a_{lm}$・$_j b_{lm}$・$_j e_{lm}$・$_j f_{lm}$を要素に持つ（L＋1）×（L＋1）の部分マトリックス。

式(12)から明らかな様に〔C_{coeff}〕の要素として計算しなければならないのは〔A_1〕・〔B_1〕・〔E_1〕・〔F_1〕・〔B_2〕・〔E_3〕・〔F_2〕・〔F_3〕・〔F_4〕の9つの部分マトリックスの要素である。これらのマトリックスの要素は式(8・a)～(8・d)で計算されるが，このままの形で積分を実行することは出来ない。積分は複素平面上の周辺積分に拡張することによって評価することが可能である。各要素ごとにその詳細を述べなければならないが，あまりにも冗長・煩雑となる為結果のみを示す事にする。数値計算に便利な様に無次元表示された最終結果が以下に示される。

$$\left\{\begin{array}{l}{}_1a_{ml}=(-1)^{\frac{m-l}{2}}\cdot\Big[-2\pi\cdot i\cdot\dfrac{(\xi_R{}^2-\delta^2)^{\frac{1}{2}}}{f'(\xi_R)}\cdot J_m(\xi_R\Omega)\\[3mm] \qquad\cdot H^{(2)}_l(\xi_R\Omega)+\displaystyle\int_0^{\delta}\frac{i\cdot 2(\delta^2-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_1(\xi)}\cdot J_m(\xi\Omega)\\[3mm] \qquad\cdot H^{(2)}_l(\xi\Omega)\,d\xi+\displaystyle\int_{\delta}^{1}\frac{i\cdot 8\xi^2\cdot(\xi^2-\delta^2)\cdot(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_2(\xi)}\\[3mm] \qquad\cdot J_m(\xi\Omega)\cdot H^{(2)}_l(\xi\Omega)\,d\xi\ \Big]\\ \qquad\qquad\qquad\qquad m\geqq l\quad m+l：偶数\\ {}_1a_{ml}={}_1a_{lm}\qquad\qquad l>m\quad m+l：偶数\\ {}_1a_{ml}=0\qquad\qquad\qquad\qquad m+l：奇数\end{array}\right. \tag{13・a}$$

ここに　ξ：k/k_β 無次元化波数

δ：$\dfrac{k_\alpha}{k_\beta}=\left\{\dfrac{(1-2\sigma)}{2(1-\sigma)}\right\}^{\frac{1}{2}}$

但し，σはポアソン比

$f(\xi)$：$(1-2\xi^2)^2-4\xi^2\cdot(\xi^2-\delta^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}$

無次元量であらわされたRayleigh関数

ξ_R：Rayleighの極で$f(\xi_R)=0$を満たす。

$J_m(\ )$：第1種m次Bessel関数

$H^{(2)}_l(\ )$：第2種l次Hankel関数

$g_1(\xi)$：$(1-2\xi^2)^2+4\xi^2\cdot(\delta^2-\xi^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}$

$g_2(\xi)$：$(1-2\xi^2)^4+16\xi^4\cdot(\xi^2-\delta^2)\cdot(1-\xi^2)$

$$
{}_1b_{ml}=\begin{cases}
\eta\cdot(-1)^{\frac{m-l}{2}}\cdot\Big[-2\pi\cdot i\cdot\dfrac{(\xi_R{}^2-\delta^2)^{\frac{1}{2}}}{f'(\xi_R)}\cdot \mathrm{J}_m(\xi_R\Omega)\\
\cdot \mathrm{H}_l^{(2)}(\eta\cdot\xi_R\Omega)\cdot\cos\xi_R\Omega(2\zeta+\eta+1)+\\
+\displaystyle\int_0^{\delta}\dfrac{i\cdot 2\cdot(\delta^2-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_1(\xi)}\cdot \mathrm{J}_m(\xi\Omega)\cdot \mathrm{H}_l^{(2)}(\eta\cdot\xi\Omega)\\
\cdot\cos\xi\Omega(2\zeta+\eta+1)\,d\xi\\
+\displaystyle\int_0^{1}\dfrac{i\cdot 8\cdot\xi^2\cdot(\xi^2-\delta^2)\cdot(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_2(\xi)}\cdot \mathrm{J}_m(\xi\Omega)\\
\cdot \mathrm{H}_l^{(2)}(\eta\cdot\xi\Omega)\cdot\cos\xi\Omega(2\zeta+\eta+1)\,d\xi\Big]\\
\quad m\geqq l\quad m+l：偶数\\
\eta\cdot(-1)^{\frac{l-m}{2}}\cdot\Big[-2\pi\cdot i\cdot\dfrac{(\xi_R{}^2-\delta^2)^{\frac{1}{2}}}{f'(\xi_R)}\cdot \mathrm{J}_l(\eta\cdot\xi_R\Omega)\\
\cdot \mathrm{H}_m^{(2)}(\xi_R\Omega)\cdot\cos\xi_R\Omega(2\zeta+\eta+1)+\\
\displaystyle\int_0^{\delta}\dfrac{i\cdot 2\cdot(\delta^2-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_1(\xi)}\cdot \mathrm{J}_l(\eta\cdot\xi\Omega)\cdot \mathrm{H}_m^{(2)}(\xi\Omega)\cdot\\
\cdot\cos\xi\Omega(2\zeta+\eta+1)\,d\xi+\\
\displaystyle\int_\delta^{1}\dfrac{i\cdot 8\cdot\xi^2\cdot(\xi^2-\delta^2)\cdot(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_2(\xi)}\cdot \mathrm{J}_l(\eta\cdot\xi\Omega)\\
\cdot \mathrm{H}_m^{(2)}(\xi\Omega)\cdot\cos\xi\Omega(2\zeta+\eta+1)\,d\xi\Big]\\
\qquad l>m,\ m+l：偶数\\
\eta\cdot(-1)^{\frac{m-l-1}{2}}\cdot\Big[-2\pi\cdot i\cdot\dfrac{(\xi_R{}^2-\delta^2)^{\frac{1}{2}}}{f'(\xi_R)}\cdot \mathrm{J}_m(\xi_R\Omega)\\
\cdot \mathrm{H}_l^{(2)}(\eta\cdot\xi_R\Omega)\cdot\sin\xi_R\Omega(2\zeta+\eta+1)+\\
\displaystyle\int_0^{\delta}\dfrac{i\cdot 2\cdot(\delta^2-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_1(\xi)}\cdot \mathrm{J}_m(\xi\Omega)\cdot \mathrm{H}_l^{(2)}(\eta\cdot\xi\Omega)\\
\cdot\sin\xi\Omega(2\zeta+\eta+1)\,d\xi+\\
\displaystyle\int_\delta^{1}\dfrac{i\cdot 8\cdot\xi^2\cdot(\xi^2-\delta^2)\cdot(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_2(\xi)}\cdot \mathrm{J}_m(\xi\Omega)\\
\cdot \mathrm{H}_l^{(2)}(\eta\cdot\xi\Omega)\cdot\sin\xi\Omega(2\zeta+\eta+1)\,d\xi\Big]\\
\qquad m>l,\ m+l：奇数\\
\eta\cdot(-1)^{\frac{l+1-m}{2}}\cdot\Big[-2\pi\cdot i\cdot\dfrac{(\xi_R{}^2-\delta^2)^{\frac{1}{2}}}{f'(\xi_R)}\\
\cdot \mathrm{J}_l(\eta\cdot\xi_R\Omega)\cdot \mathrm{H}_m^{(2)}(\xi_R\Omega)\cdot\sin\xi_R\Omega\ (2\zeta+\eta+1)+\\
\displaystyle\int_0^{\delta}\dfrac{i\cdot 2\cdot(\delta^2-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_1(\xi)}\cdot \mathrm{J}_l(\eta\cdot\xi\Omega)\cdot \mathrm{H}_m^{(2)}(\xi\Omega)\\
\cdot\sin\xi\Omega\ (2\zeta+\eta+1)\,d\xi+\\
\displaystyle\int_\delta^{1}\dfrac{i\cdot 8\cdot\xi^2\cdot(\xi^2-\delta^2)\cdot(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_2(\xi)}\cdot \mathrm{J}_l(\eta\cdot\xi\Omega)\\
\cdot \mathrm{H}_l^{(2)}(\xi\Omega)\sin\xi\Omega(2\zeta+\eta+1)\,d\xi\\
\qquad l>m,\ m+l：奇数
\end{cases}
\tag{13·b}
$$

$$
\begin{cases}
{}_2b_{ml}=\eta\cdot(-1)^{\frac{m-l}{2}}\cdot\Big[-2\pi\cdot i\cdot\dfrac{(\xi_R{}^2-\delta^2)^{\frac{1}{2}}}{f'(\xi_R)}\cdot \mathrm{J}_m(\eta\cdot\Omega\xi_R)\\
\quad\cdot \mathrm{H}_l^{(2)}(\eta\cdot\Omega\xi_R)+\displaystyle\int_0^{\delta}\dfrac{i\cdot 2\cdot(\delta^2-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_1(\xi)}\cdot \mathrm{J}_m(\eta\cdot\Omega\xi)\\
\quad\cdot \mathrm{H}_l^{(2)}(\eta\cdot\Omega\xi)\,d\xi+\displaystyle\int_\delta^{1}\dfrac{i\cdot 8\cdot\xi^2\cdot(\xi^2-\delta^2)\cdot(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_2(\xi)}\\
\quad\cdot \mathrm{J}_m(\eta\cdot\Omega\xi)\cdot \mathrm{H}_l^{(2)}(\eta\cdot\Omega\xi)\,d\xi\Big]\\
\qquad\qquad m\geqq l,\ m+l：偶数\\
{}_2b_{ml}={}_2b_{lm}\qquad l>m,\ m+l：偶数\\
{}_2b_{ml}=0\qquad\qquad m+l：奇数
\end{cases}
\tag{13·c}
$$

$$
\begin{cases}
{}_1e_{ml}=(-1)^{\frac{m-l-1}{2}}\cdot\Big[-2\pi\cdot i\\
\cdot\dfrac{\xi_R\{2\xi_R{}^2-1-2(\xi_R{}^2-\delta^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\xi_R{}^2-1)^{\frac{1}{2}}\}}{f'(\xi_R)}\cdot \mathrm{J}_m(\xi_R\Omega)\\
\cdot \mathrm{H}_l^{(2)}(\xi_R\Omega)+\dfrac{4}{\pi}\cdot(-1)^{\frac{m-l-1}{2}}\\
\cdot\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{\xi\cdot\{2\xi^2+1-2(\xi^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\xi^2+1)^{\frac{1}{2}}\}}{g_3(\xi)}\\
\cdot \mathrm{I}_m(\xi\Omega)\cdot \mathrm{K}_l(\xi\Omega)\,d\xi+\\
i\cdot 4\cdot\displaystyle\int_\delta^{1}\dfrac{\xi\cdot(2\xi^2-1)\cdot(\xi^2-\delta^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_2(\xi)}\\
\cdot \mathrm{J}_m(\xi\Omega)\cdot \mathrm{H}_l^{(2)}(\xi\Omega)\,d\xi\Big]\\
\qquad\qquad m>l,\ m+l：奇数\\
{}_1e_{ml}=-{}_1e_{lm}\qquad l>m,\ m+l：奇数\\
{}_1e_{ml}=0\qquad\qquad m+l：偶数
\end{cases}
\tag{13·d}
$$

ここに　$\mathrm{I}_m(\ )\cdot \mathrm{K}_l(\ )$：Modefied Bessel Function[6)]

$$
{}_1f_{ml}=\begin{cases}
(-1)^{\frac{m-l-2}{2}}\cdot\eta\cdot\Big[-2\pi\cdot i\\
\cdot\dfrac{\xi_R\cdot\{2\xi_R{}^2-1-2(\xi_R{}^2-\delta^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\xi_R{}^2-1)^{\frac{1}{2}}\}}{f'(\xi_R)}\\
\cdot \mathrm{J}_m(\xi_R\Omega)\cdot \mathrm{H}_l^{(2)}(\eta\cdot\xi_R\Omega)\cdot\sin\xi_R\Omega(2\zeta+\eta+1)+\\
\dfrac{4}{\pi}\cdot(-1)^{\frac{m-l}{2}}\cdot\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{\xi\cdot\{2\xi^2+1-2(\xi^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\xi^2+1)^{\frac{1}{2}}\}}{g_3(\xi)}\\
\cdot \mathrm{I}_m(\xi\Omega)\cdot \mathrm{K}_l(\eta\cdot\xi\Omega)\cdot\sinh\xi\Omega(2\zeta+\eta+1)\,d\xi+\\
i\cdot 4\cdot\displaystyle\int_\delta^{1}\dfrac{\xi\cdot(2\xi^2-1)\cdot(\xi^2-\delta^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_2(\xi)}
\end{cases}
$$

$$\cdot\,\mathrm{J}_m(\xi\Omega)\cdot\mathrm{H}_l^{(2)}(\eta\cdot\xi\Omega)\cdot\sin\xi\Omega(2\zeta+\eta+1)\,d\xi\Big]$$

$m\geqq l$, $m+l$：偶数

$$(-1)^{\frac{l-m-2}{2}}\cdot\eta\cdot\Big[-2\pi\cdot i$$

$$\cdot\frac{\xi_R\cdot\{2\xi_R{}^2-1-2(\xi_R{}^2-\delta^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\xi_R{}^2-1)^{\frac{1}{2}}\}}{f'(\xi_R)}$$

$$\cdot\,\mathrm{J}_l(\eta\cdot\xi_R\Omega)\cdot\mathrm{H}_m^{(2)}(\xi_R\Omega)\cdot\sin\xi_R\Omega(2\zeta+\eta+1)+\frac{4}{\pi}$$

$$\cdot(-1)^{\frac{m-l}{2}}\cdot\int_0^\infty\frac{\xi\cdot\{2\xi^2+1-2(\xi^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\xi^2+1)^{\frac{1}{2}}\}}{g_3(\xi)}$$

$$\cdot\mathrm{I}_l(\eta\cdot\xi\Omega)\cdot\mathrm{K}_m(\xi\Omega)\cdot\sinh\xi\Omega(2\zeta+\eta+1)\,d\xi+$$

$$i\cdot4\cdot\int_\delta^1\frac{\xi\cdot(2\xi^2-1)\cdot(\xi^2-\delta^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_2(\xi)}$$

$$\cdot\mathrm{J}_l(\eta\cdot\xi\Omega)\cdot\mathrm{H}_m^{(2)}(\xi\Omega)\cdot\sin\xi\Omega(2\zeta+\eta+1)\,d\xi\Big]$$

$l>m$, $m+l$：偶数

$$(-1)^{\frac{m-l-1}{2}}\cdot\eta\cdot\Big[-2\pi\cdot i$$

$$\cdot\frac{\xi_R\cdot\{2\xi_R{}^2-1-2(\xi_R{}^2-\delta^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\xi_R{}^2-1)^{\frac{1}{2}}\}}{f'(\xi_R)}$$

$$\cdot\,\mathrm{J}_m(\xi_R\Omega)\cdot\mathrm{H}_l^{(2)}(\eta\cdot\xi_R\Omega)\cdot\cos\xi_R\Omega(2\zeta+\eta+1)+\frac{4}{\pi}$$

$$\cdot(-1)^{\frac{m-l-1}{2}}\cdot\int_0^\infty\frac{\xi\cdot\{2\xi^2+1-2(\xi^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\xi^2+1)^{\frac{1}{2}}\}}{g_3(\xi)}$$

$$\cdot\mathrm{I}_m(\xi\Omega)\cdot\mathrm{K}_l(\eta\cdot\xi\Omega)\cdot\cosh\xi\Omega(2\zeta+\eta+1)\,d\xi+i\cdot4$$

$$\cdot\int_\delta^1\frac{\xi\cdot(2\xi^2-1)\cdot(\xi^2-\delta^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_2(\xi)}\cdot\mathrm{J}_m(\xi\Omega)$$

$$\cdot\mathrm{H}_l^{(2)}(\eta\cdot\xi\Omega)\cdot\cos\xi\Omega(2\zeta+\eta+1)\,d\xi\Big]$$

$m>l$, $m+l$：奇数

$$(-1)^{\frac{l-m+1}{2}}\cdot\eta\cdot\Big[-2\pi\cdot i$$

$$\cdot\frac{\xi_R\cdot\{2\xi_R{}^2-1-2(\xi_R{}^2-\delta^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\xi_R{}^2-1)^{\frac{1}{2}}\}}{f'(\xi_R)}\cdot\mathrm{J}_l(\eta\cdot\xi_R\Omega)$$

$$\cdot\mathrm{H}_m^{(2)}(\xi_R\Omega)\cdot\cos\xi_R\Omega(2\zeta+\eta+1)+\frac{4}{\pi}$$

$$\cdot(-1)^{\frac{l-m-1}{2}}\cdot\int_0^\infty\frac{\xi\cdot\{2\xi^2+1-2(\xi^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\xi^2+1)^{\frac{1}{2}}\}}{g_3(\xi)}$$

$$\cdot\mathrm{I}_l(\eta\cdot\xi\Omega)\cdot\mathrm{K}_m(\xi\Omega)\cdot\cosh\xi\Omega(2\zeta+\eta+1)\,d\xi+i\cdot4$$

$$\cdot\int_\delta^1\frac{\xi\cdot(2\xi^2-1)\cdot(\xi^2-\delta^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_2(\xi)}\cdot\mathrm{J}_l(\eta\cdot\xi\Omega)$$

$$\cdot\mathrm{H}_m^{(2)}(\xi\Omega)\cdot\cos\xi\Omega(2\zeta+\eta+1)\,d\xi\Big]$$

$l>m$, $m+l$：奇数

(13·e)

但し $g_3(\xi)：(2\xi^2+1)^2-4\xi^2\cdot(\xi^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\xi^2+1)^{\frac{1}{2}}$

$$_2f_{ml}=\eta\cdot(-1)^{\frac{m-l-1}{2}}\cdot\Big[-2\pi\cdot i$$

$$\cdot\frac{\xi_R\cdot\{2\xi_R{}^2-1-2(\xi_R{}^2-\delta^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\xi_R{}^2-1)^{\frac{1}{2}}\}}{f'(\xi_R)}$$

$$\cdot\,\mathrm{J}_m(\eta\cdot\xi_R\Omega)\cdot\mathrm{H}_l^{(2)}(\eta\cdot\xi_R\Omega)+\frac{4}{\pi}\cdot(-1)^{\frac{m-l-1}{2}}$$

$$\cdot\int_0^\infty\frac{\xi\cdot\{2\xi^2+1-2(\xi^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\xi^2+1)^{\frac{1}{2}}\}}{g_3(\xi)}$$

$$\cdot\mathrm{I}_m(\eta\cdot\xi\Omega)\cdot\mathrm{K}_l(\eta\cdot\xi\Omega)\,d\xi+i\cdot4$$

$$\cdot\int_\delta^1\frac{\xi\cdot(2\xi^2-1)\cdot(\xi^2-\delta^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_2(\xi)}$$

$$\cdot\mathrm{J}_m(\eta\cdot\xi\Omega)\cdot\mathrm{H}_l^{(2)}(\eta\cdot\xi\Omega)\,d\xi\Big]$$

$m>l$,（$m+l$）：奇数

$_2f_{ml}=-{}_2f_{lm}$　　$l>m$,（$m+l$）：奇数

$_2f_{ml}=0$　　（$m+l$）：偶数

(13·f)

$$_3e_{ml}=(-1)^{\frac{m-l}{2}}\cdot\Big[-2\pi\cdot i\cdot\frac{(\xi_R{}^2-1)^{\frac{1}{2}}}{f'(\xi_R)}\cdot\mathrm{J}_m(\xi_R\Omega)$$

$$\cdot\mathrm{H}_l^{(2)}(\xi_R\Omega)+i\cdot2\cdot\int_0^\delta\frac{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_1(\xi)}\cdot\mathrm{J}_m(\xi\Omega)$$

$$\cdot\,\mathrm{H}_l^{(2)}(\xi\Omega)\,d\xi+i\cdot2\cdot\int_\delta^1\frac{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(2\xi^2-1)^2}{g_2(\xi)}$$

$$\cdot\mathrm{J}_m(\xi\Omega)\cdot\mathrm{H}_l^{(2)}(\xi\Omega)\,d\xi\Big]$$

$m\geqq l$,（$m+l$）：偶数

$_3e_{ml}={}_3e_{lm}$　　$l>m$,（$m+l$）：偶数

$_3e_{ml}=0$　　（$m+l$）：奇数

(13·g)

$$_3f_{ml}=\eta\cdot(-1)^{\frac{m-l}{2}}\cdot\Big[-2\pi\cdot i\cdot\frac{(\xi_R{}^2-1)^{\frac{1}{2}}}{f'(\xi_R)}\cdot\mathrm{J}_m(\xi_R\Omega)$$

$$\cdot\mathrm{H}_l^{(2)}(\eta\cdot\xi_R\Omega)\cdot\cos\xi_R\Omega(2\zeta+\eta+1)+$$

$$i\cdot2\cdot\int_0^\delta\frac{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_1(\xi)}\cdot\mathrm{J}_m(\xi\Omega)\cdot\mathrm{H}_l^{(2)}(\eta\cdot\xi\Omega)\cdot\cos\xi\Omega$$

$$\cdot(2\zeta+\eta+1)\,d\xi+i\cdot2\cdot\int_\delta^1\frac{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(2\xi^2-1)^2}{g_2(\xi)}$$

$$\cdot\,\mathrm{J}_m(\xi\Omega)\cdot\mathrm{H}_l^{(2)}(\eta\cdot\xi\Omega)\cdot\cos\xi\Omega(2\zeta+\eta+1)\,d\xi\Big]$$

$m\geqq l$,（$m+l$）：偶数

$$\eta\cdot(-1)^{\frac{l-m}{2}}\cdot\Big[-2\pi\cdot i\cdot\frac{(\xi_R{}^2-1)^{\frac{1}{2}}}{f'(\xi_R)}\cdot\mathrm{J}_l(\eta\cdot\xi_R\Omega)$$

$$\cdot\mathrm{H}_m^{(2)}(\xi_R\Omega)\cdot\cos\xi_R\Omega(2\zeta+\eta+1)+$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
& i\cdot 2\cdot\int_0^{\delta}\frac{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_1(\xi)}\cdot J_l(\eta\cdot\xi\Omega)\cdot H_m^{(2)}(\xi\Omega) \\
& \cdot\cos\xi\Omega(2\zeta+\eta+1)\,d\xi+ \\
& i\cdot 2\cdot\int_{\delta}^{1}\frac{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(2\xi^2-1)^2}{g_2(\xi)}\cdot J_l(\eta\cdot\xi\Omega) \\
& \cdot H_m^{(2)}(\xi\Omega)\cdot\cos\xi\Omega(2\zeta+\eta+1)\,d\xi\Big] \\
& \qquad\qquad l>m,\ (m+l):\text{偶数} \\
& \eta\cdot(-1)^{\frac{m-l-1}{2}}\cdot\Big[-2\pi\cdot i\cdot\frac{(\xi_R{}^2-1)^{\frac{1}{2}}}{f'(\xi_R)}\cdot J_m(\xi_R\Omega) \\
& \cdot H_l^{(2)}(\eta\cdot\xi_R\Omega)\cdot\sin\xi_R\Omega(2\zeta+\eta+1)+ \\
& i\cdot 2\cdot\int_0^{\delta}\frac{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_1(\xi)}\cdot J_m(\xi\Omega)\cdot H_l^{(2)}(\eta\cdot\xi\Omega)\cdot\sin\xi\Omega \\
& \cdot(2\zeta+\eta+1)\,d\xi+i\cdot 2\cdot\int_{\delta}^{1}\frac{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(2\xi^2-1)^2}{g_2(\xi)} \\
& \cdot J_m(\xi\Omega)\cdot H_l^{(2)}(\eta\cdot\xi\Omega)\cdot\sin\xi\Omega(2\zeta+\eta+1)\,d\xi\Big] \\
& \qquad\qquad m>l,\ (m+l):\text{奇数} \\
& \eta\cdot(-1)^{\frac{l-m+1}{2}}\cdot\Big[-2\pi\cdot i\cdot\frac{(\xi_R{}^2-1)^{\frac{1}{2}}}{f'(\xi_R)}\cdot J_l(\eta\cdot\xi_R\Omega) \\
& \cdot H_m^{2}(\xi_R\Omega) \\
& \cdot\sin\xi_R\Omega(2\zeta+\eta+1)+i\cdot 2\cdot\int_0^{\delta}\frac{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_1(\xi)} \\
& \cdot J_l(\eta\cdot\xi\Omega)\cdot H_m^{(2)}(\xi\Omega)\cdot\sin\xi\Omega(2\zeta+\eta+1)\,d\xi+ \\
& i\cdot 2\cdot\int_{\delta}^{1}\frac{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(2\xi^2-1)^2}{g_2(\xi)}\cdot J_l(\eta\cdot\xi\Omega) \\
& \cdot H_m^{(2)}(\xi\Omega)\cdot\sin\xi\Omega(2\zeta+\eta+1)\,d\xi\Big] \\
& \qquad\qquad l>m,\ (m+l):\text{奇数}
\end{aligned}
\right.
\tag{13・h}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
& {}_4f_{ml}=\eta\cdot(-1)^{\frac{m-l}{2}}\cdot\Big[-2\pi\cdot i\cdot\frac{(\xi_R{}^2-1)^{\frac{1}{2}}}{f'(\xi_R)}\cdot J_m(\eta\cdot\xi_R\Omega) \\
& \qquad\cdot H_l^{(2)}(\eta\cdot\xi_R\Omega)+i\cdot 2\cdot\int_0^{\delta}\frac{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{g_1(\xi)}\cdot J_m(\eta\cdot\xi\Omega) \\
& \qquad\cdot H_l^{(2)}(\eta\cdot\xi\Omega)\,d\xi+i\cdot 2\cdot\int_{\delta}^{1}\frac{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(2\xi^2-1)^2}{g_2(\xi)} \\
& \qquad\cdot J_m(\eta\cdot\xi\Omega)\cdot H_l^{(2)}(\eta\cdot\xi\Omega)\,d\xi\Big] \\
& \qquad\qquad\qquad m\geqq l,\ (m+l):\text{偶数} \\
& {}_4f_{ml}={}_4f_{lm}\qquad\qquad l>m,\ (m+l):\text{偶数} \\
& {}_4f_{ml}=0\qquad\qquad\qquad (m+l):\text{奇数}
\end{aligned}
\right.
\tag{13・i}
$$

4．{$\mathbf{E}_n$}の要素の計算

式(10)の右辺のベクトル{$\mathbf{E}_n$}の要素${}_jE_{n,m}$（$j=1\sim4$，$n=1\sim10$，$m=0\sim L$）を式(8・e)より計算する。混合境界値問題の順$n=1$から$n=10$まで結果のみを示すと次式の様になる。

$n=1$のとき

$$
\left\{
\begin{aligned}
& {}_1E_{1,m}={}_2E_{1,m}=\begin{cases}2 & m=0\\ 0 & m\neq 0\end{cases} \\
& {}_3E_{1,m}={}_4E_{1,m}=0
\end{aligned}
\right.
\tag{14・a}
$$

$n=2$のとき

$$
\left\{
\begin{aligned}
& {}_jE_{2,m}=\begin{cases}(-1)^j\cdot 2 & m=0\\ 0 & m\neq 0\end{cases}\qquad j=1,\ 2 \\
& {}_3E_{2,m}={}_4E_{2,m}=0
\end{aligned}
\right.
\tag{14・b}
$$

$n=3$のとき

$$
\left\{
\begin{aligned}
& {}_1E_{3,m}=\begin{cases}1 & m=1\\ 0 & m\neq 1\end{cases} \\
& {}_2E_{3,m}=\begin{cases}\eta & m=1\\ 0 & m\neq 1\end{cases} \\
& {}_3E_{3,m}={}_4E_{3,m}=0
\end{aligned}
\right.
\tag{14・c}
$$

$n=4$のとき

$$
\left\{
\begin{aligned}
& {}_1E_{4,m}=-{}_1E_{3,m} \\
& {}_2E_{4,m}={}_2E_{3,m} \\
& {}_3E_{4,m}={}_4E_{4,m}=0
\end{aligned}
\right.
\tag{14・d}
$$

$n=5$のとき

$$
\left\{
\begin{aligned}
& {}_1E_{5,m}={}_2E_{5,m}=0 \\
& {}_3E_{5,m}={}_4E_{5,m}={}_1E_{1,m}
\end{aligned}
\right.
\tag{14・e}
$$

$n=6$のとき

$$
\left\{
\begin{aligned}
& {}_1E_{6,m}={}_2E_{6,m}=0 \\
& {}_jE_{6,m}=\begin{cases}(-1)^j\cdot 2 & m=0\\ 0 & m\neq 0\end{cases}\qquad j=3,\ 4
\end{aligned}
\right.
\tag{14・f}
$$

$n=7$のとき

$$
\left\{
\begin{aligned}
& {}_1E_{7,m}=\begin{cases}(-1)^{\frac{m}{2}}\cdot 2\cdot\cos\delta_1\Omega(\zeta+1)\cdot J_m(\delta_1\Omega) & m:\text{偶数}\\ (-1)^{\frac{m-1}{2}}\cdot 2\cdot\sin\delta_1\Omega(\zeta+1)\cdot J_m(\delta_1\Omega) & m:\text{奇数}\end{cases} \\
& {}_2E_{7,m}=\begin{cases}(-1)^{\frac{m}{2}}\cdot 2\cdot\cos\delta_1\Omega(\zeta+\eta)\cdot J_m(\eta\cdot\delta_1\Omega) & m:\text{偶数}\\ -(-1)^{\frac{m-1}{2}}\cdot 2\cdot\sin\delta_1\Omega(\zeta+\eta)\cdot J_m(\eta\cdot\delta_1\Omega) & m:\text{奇数}\end{cases} \\
& {}_3E_{7,m}={}_4E_{7,m}=0
\end{aligned}
\right.
\tag{14・g}
$$

$n=8$のとき

$$\begin{cases} {}_1E_{8,m}=\begin{cases} -(-1)^{\frac{m}{2}}\cdot 2\cdot\sin\delta_I\Omega(\zeta+1)\cdot J_m(\delta_I\Omega) & m:\text{偶数} \\ (-1)^{\frac{m-1}{2}}\cdot 2\cdot\cos\delta_I\Omega(\zeta+1)\cdot J_m(\delta_I\Omega) & m:\text{奇数} \end{cases} \\ {}_1E_{8,m}=\begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}}\cdot 2\cdot\sin\delta_I\Omega(\zeta+\eta)\cdot J_m(\eta\cdot\delta_I\Omega) & m:\text{偶数} \\ (-1)^{\frac{m-1}{2}}\cdot 2\cdot\cos\delta_I\Omega(\zeta+\eta)\cdot J_m(\eta\cdot\delta_I\Omega) & m:\text{奇数} \end{cases} \\ {}_3E_{8,m}={}_4E_{8,m}=0 \end{cases} \tag{14·h}$$

$$\begin{cases} n=9\text{のとき} \\ {}_1E_{9,m}={}_2E_{9,m}=0 \\ {}_3E_{9,m}={}_1E_{7,m} \\ {}_4E_{9,m}={}_2E_{7,m} \end{cases} \tag{14·i}$$

$n=10$のとき

$$\begin{cases} {}_1E_{10,m}={}_2E_{10,m}=0 \\ {}_3E_{10,m}={}_1E_{8,m} \\ {}_4E_{10,m}={}_2E_{8,m} \end{cases} \tag{14·j}$$

但し，δ_I：k_I/k_β　入射波の無次元化波数

5. む す び

基礎一地盤系の地震時における相互作用の問題を混合境界条件のもとで解析し，その内特に積分方程式の解法の部分について詳しく解析結果を表示した。解析方法は連立の Fledholm 第1種積分方程式を Galerkin の近似解法で解くと言う方法である。本論文の目的は解析対象の一般化に伴って生ずる諸パラメーター間のカップリング現象を明らかにする事であり，式の展開はその一般化に伴いかなり複雑となる。特にマトリックス方程式において既知量として扱われる係数マトリックスの要素の計算がそうである。複素平面上における周辺積分の結果虚軸上の無限積分項が最後まで残り，本解析結果の特徴をなしている。前報告の様にマトリックスの要素の数も少なく，有限積分の項のみで表示された解析結果の数値計算においても，電子計算機の演算時間が長すぎる欠点があったのであるから，本論文の解析結果の数値計算は少し工夫が必要である。数値計算結果等についてはまた別の機会に発表したいと考えている。

6. 謝　　辞

研究の推進に当り深い御理解と御配慮を示して下さる名古屋大学松岡理教授と本学小高昭夫教授に対しここに深く感謝の意をあらわす次第である。

7. 参考文献

1）中村満喜男：半無限弾性地盤上の二つの基礎の地震応答　その1．問題の定式化，愛知工業大学〝研究報告″№15．(1980)

2）中村満喜男：半無限弾性地盤上の二つの基礎の地震応答　その2．数値計算とその結果，愛知工業大学〝研究報告″№15．(1980)

3）W. Maurice Ewing, Wenceslas S. Jardezky, Frank Press：Elastic Waves in Layered Media, Mc Graw Hill.

4）Markus Båth：Mathematical Aspects of Seismology, Elsevier Publishing Company.

5）佐藤泰夫：弾性波動論，岩波書店

6）数学ハンドブック編集委員会：理工学のための数学ハンドブック，丸善

（受理　昭和56年1月16日）