愛知工業大学研究報告
第17号B　昭和57年

3次元ポテンシャル問題解析のための立体要素

青木徹彦・木村勝行・佐藤浩一*

Finite Elements for Three-Dimensional Potential Problen Analysis

Tetsuhiko AOKI, Katsuyuki KIMURA and Hirokazu SATO

Three dimensional FEM analysis has some problems in practical application because of complecated element division and large number of node and element data involved. It still should be payed attention to save computing time by considering proper element idealization and minimizing the number of nodal points, though some specific program such as automatic data input program has already been prepared for actual computation.

This paper discusses practical application of three-dimensional finite elements in the analysis of field problems. Simple tetrahedral elements may be convenient if they are assembled as eight-cornered brick elements. Average element stiffness matrix is employed in this case, dividing brick elements in two different ways. Isoparametric triangular prizm element is also introduced here as another useful element and the process of the formulation of element stiffness matrix is presented.

1. 序　　言

我々の身のまわりの工学的現象のほとんどは3次元的であるが，多くの場合，現実的対処としてこれらを2次元的，あるいは1次元的に取扱っており，またそれで工学的に充分なことが多い。

しかしながら，問題によっては3次元解析が必要であるにもかかわらず，その解析方法の複雑さや困難さのゆえに2次元解析に甘んじ，現象を充分な精度で解析できないままでいたり，あるいはその結果，それぞれの分野における工学的所産の経済性を犠牲にした状態もなお，少なからず存在するようである。

幸い，近年のコンピューターの性能向上とコンピューターによる種々の解析手法の発達により3次元解析が比較的楽にできるようになった。

3次元ポテンシャル問題を解析する場合，現在最も汎用性の高い解法は有限要素法であろう。有限要素法に関する研究は国内外とも極めて多いが，3次元問題を解析した例は多いとはいえない。2次元問題と同様，3次元要素の形状や要素内部の補間関数にはいくつかの種類があるが，実際に有限要素分割を行って解析をしようとすると，どの要素を用いるかによって実用上のいくつかの問題が生じてくる。たとえば有限要素法では解析対象を要素分割した後，要素番号や節点座標を入力データとして作製しなければならないが，3次元領域の場合，人間の手でこれを行うことはもはや実用的ではなく，自動入力の方法を考える必要がある。しかも，未知数の数が膨大となるから，メッシュ分割の方法を充分考えて，できるだけ少ない分割数で必要な精度が保たれるよう配慮しなければならない。

本報告は3次元有限要素解析におけるこのような問題点に鑑み，これをポテンシャル問題に応用するに際して，実用上望ましいと思われる立体要素のうち，はじめに4面体要素とその組合わせによる6面体要素について述べ，また，新たに三角柱アイソパラメトリック要素の定式化を行ったのでその誘導過程と結果を示すものである。

2. 場の問題の有限要素式

場の問題の偏微分方程式を有限要素式へ離散化すると，外部作用 $\{F^{(e)}\}$ と内部ポテンシャル $\{\phi\}$ の関数は次のように表わされる。[1] ここで添字(e)は要素に対することを示す。

$$[K^{(e)}]\{\phi\}+\{F^{(e)}\}=0 \qquad (2\cdot1)$$

上式で $[K^{(e)}]$ をフィールドマトリックス，または場のマトリックスと呼ぶことにする。$[K^{(e)}]$，および $\{F^{(e)}\}$ の内容は，熱伝達またはそれに類する他の問題の境界条件がないとき次式のようになる。

$$[\mathrm{K}^{(e)}]=\int_{\mathrm{V}}[\mathrm{B}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{D}][\mathrm{B}]\{\phi\}\,d\mathrm{V} \tag{2·2a}$$

$$\{\mathrm{F}^{(e)}\}=\int_{\mathrm{V}}\mathrm{Q}\langle\mathrm{N}\rangle^{\mathrm{T}}dv+\int_{\mathrm{S}}q_0\langle\mathrm{N}\rangle^{\mathrm{T}}ds \tag{2·2b}$$

上式中の各記号の内容は以下のようである。

$$[\mathrm{B}]=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\langle\mathrm{N}\rangle}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial\langle\mathrm{N}\rangle}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial\langle\mathrm{N}\rangle}{\partial z}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\mathrm{N}_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\mathrm{N}_2}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial\mathrm{N}_n}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial\mathrm{N}_1}{\partial y} & \dfrac{\partial\mathrm{N}_2}{\partial y} & \cdots & \dfrac{\partial\mathrm{N}_n}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial\mathrm{N}_1}{\partial z} & \dfrac{\partial\mathrm{N}_2}{\partial z} & \cdots & \dfrac{\partial\mathrm{N}_n}{\partial z}\end{bmatrix} \tag{2·2c}$$

$$[\mathrm{D}]=\begin{bmatrix}k_x & \cdot & \cdot\\ \cdot & k_y & \cdot\\ \cdot & \cdot & k_z\end{bmatrix} \tag{2·2d}$$

ここでVは要素体積，Sはqに関する境界表面積，k_x，k_y，k_zはそれぞれx，y，z方向の要素内ポテンシャル伝導係数（熱伝導率，浸透係数など），Qは物体内の発熱（湧出），qは物体表面での単位面積当りのポテンシャル流速。

また，ϕのx，y，z方向の勾配を$\{g\}$とおくと，

$$\{g\}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\langle\mathrm{N}\rangle}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial\langle\mathrm{N}\rangle}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial\langle\mathrm{N}\rangle}{\partial z}\end{Bmatrix}\{\phi\}=[\mathrm{B}]\{\phi\} \tag{2·3}$$

したがって，実際問題として必要となるϕの勾配は〔B〕マトリックスと節点ポテンシャル$\{\phi\}$によって容易に求められる。

3.　4面体要素とその組み合わせによる平均6面体要素

(1)　概　　説

立体要素のうち，4面体要素は最も単純な要素であり，要素マトリックスの作製が簡単である反面，対象物を4面体要素に分割し，入力データを作ろうとするとそのままでは取り扱いにくいものとなる。また，解に分割の方向性の影響が現われることがある。この緩和を図る方法の1つに，解析領域を6面体要素に分割し，個々の6面体要素をさらに5個の4面体要素から組み立てる方法がある。[2)]

(2)　4面体要素

Fig. 1は$x\ y\ z$座標系における4面体要素$i\ j\ k\ l$を示している。4節点の番号をつける順は，$i\ j\ k\ l$；$k\ j\ l\ i$；など，最後の節点からみて，つねに最初の3つの節点は反時計まわりとなるようにする。そして，要素内部のポテンシャルϕが次のような1次関数で表わせるものとする。

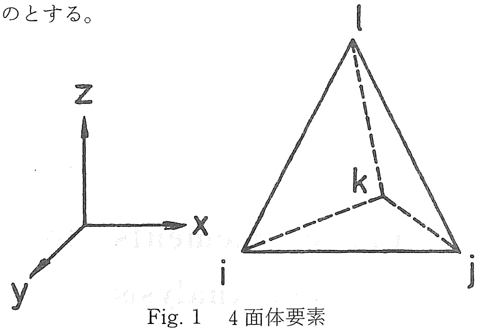

Fig. 1　4面体要素

$$\phi=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y+\alpha_4z=[\,1\ x\ y\ z\,]\{\alpha\} \tag{3·1}$$

ここに，

$$\{\alpha\}^{\mathrm{T}}=[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4] \tag{3·2}$$

4つの係数αは$(x,\ y,\ z)$に節点座標を代入して得られる次の連立方程式から求めることができる。

$$\left.\begin{aligned}\phi_i&=\alpha_1+\alpha_2x_i+\alpha_3y_i+\alpha_4z_i\\ \phi_j&=\alpha_1+\alpha_2x_j+\alpha_3y_j+\alpha_4z_j\\ \phi_k&=\alpha_1+\alpha_2x_k+\alpha_3y_k+\alpha_4z_k\\ \phi_l&=\alpha_1+\alpha_2x_l+\alpha_3y_l+\alpha_4z_l\end{aligned}\right\} \tag{3·3}$$

式(3·3)をマトリックス表示すると，

$$\{\phi\}=[\phi_i\ \ \phi_j\ \ \phi_k\ \ \phi_l]=[\mathrm{C}]\{\alpha\} \tag{3·4}$$

ここに，

$$[\mathrm{C}]=\begin{bmatrix}1 & x_i & y_i & z_i\\ 1 & x_j & y_j & z_j\\ 1 & x_k & y_k & z_k\\ 1 & x_l & y_l & z_l\end{bmatrix} \tag{3·5}$$

係数マトリックス$\{\alpha\}$は〔C〕の逆マトリックスを計算し，式(3·4)に$[\mathrm{C}]^{-1}$を前から乗じて求められる。すなわち，

$$\{\alpha\}=[\mathrm{C}]^{-1}\{\phi\} \tag{3·6}$$

ここに，

$$[\mathrm{C}]^{-1}=\frac{1}{6\mathrm{V}}\begin{bmatrix}a_i & b_i & c_i & d_i\\ a_j & b_j & c_j & d_j\\ a_k & b_k & c_k & d_k\\ a_l & b_l & c_l & d_l\end{bmatrix} \tag{3·7}$$

$$6\mathrm{V}=\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i & z_i\\ 1 & x_j & y_j & z_j\\ 1 & x_k & y_k & z_k\\ 1 & x_l & y_l & z_l\end{vmatrix}\quad(\text{Vは6面体の体積}) \tag{3·8}$$

また，各係数は次のように与えられる。

$$\left.\begin{aligned}a_i&=x_jy_kz_l+x_ky_lz_j+x_ly_jz_k-x_jy_lz_k-\\ &\quad-x_ky_jz_l-x_ly_kz_j\\ b_i&=y_jz_l+y_kz_j+y_lz_k-y_jz_k-y_kz_l-y_lz_j\\ c_i&=x_jz_k+x_kz_l+x_lz_j-x_jz_l-x_kz_j-x_lz_k\\ d_i&=x_jy_l+x_ky_j+x_ly_k-x_jy_k-x_ly_j-x_ky_l\end{aligned}\right\} \tag{3·9}$$

a_j，a_k，a_l，b_j，…，d_k，d_lは回転順列。

式(3·6)を式(3·2)に代入すると，

$$\phi=[1\ x\ y\ z][\mathrm{C}]^{-1}\{\phi\} \tag{3・10}$$

となる。

ここで，形状関数を

$$[\mathrm{N}]=[\mathrm{N}_i\ \mathrm{N}_j\ \mathrm{N}_k\ \mathrm{N}_l]=[1\ x\ y\ z][\mathrm{C}]^{-1} \tag{3・11}$$

で定義すると，

$$\phi=[\mathrm{N}]\{\phi\} \tag{3・12}$$

となる。したがって，式(2・2)aの内容は以下のようである。

$$[\mathrm{K}^{(e)}]=\int_{\mathrm{v}}[\mathrm{B}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{D}][\mathrm{B}]\{\phi\}\,d\mathrm{V}$$

$$=\frac{1}{36\mathrm{V}}\begin{bmatrix} b_i & c_i & d_i \\ b_j & c_j & d_j \\ b_k & c_k & d_k \\ b_l & c_l & d_l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k & b_l \\ c_i & c_j & c_k & c_l \\ d_i & d_j & d_k & d_l \end{bmatrix} \tag{3・13}$$

4面体要素のポテンシャル伝導係数の方向に対する局部座標系の軸 (x', y', z') が全体座標系の座標軸 (x, y, z) と一致しない場合，

$$\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta_{x'x} & \cos\theta_{x'y} & \cos\theta_{x'z} \\ \cos\theta_{y'x} & \cos\theta_{y'y} & \cos\theta_{y'z} \\ \cos\theta_{z'x} & \cos\theta_{z'y} & \cos\theta_{z'z} \end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix} k_{x'x'} & 0 & 0 \\ 0 & k_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & k_{z'z'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta_{x'x} & \cos\theta_{y'x} & \cos\theta_{z'x} \\ \cos\theta_{x'y} & \cos\theta_{y'y} & \cos\theta_{y'z} \\ \cos\theta_{x'z} & \cos\theta_{y'z} & \cos\theta_{z'z} \end{bmatrix} \tag{3・14}$$

ここに，$\cos\theta_{p'q}$ は $p'(x', y', z')$ 軸と $q(x, y, z)$ 軸との方向余弦である。もちろん，両座標系の軸が一致する場合は式(3・14)の左辺マトリックスの非対角項は0となる。

(3)　6面体要素

6面体を5つの4面体要素に分割する方法はFig. 2に示すように2通りである。この2通りの分割方法によって要素特性マトリックスを求めそれらを平均すれば，解に現われる方向性の影響の緩和が図れる。この場合の解は節点外力が変らない場合，重ね合わせの原理により，組み合わせる前の個々の要素による解の平均値に等しくなる。

解析領域の組み立て要素に6面体要素を採用することのメリットの1つに，節点の配置をある規則下に置けることによりデータの自動入力が容易となることがあげられる。

4．三角柱アイソパラメトリック要素

(1)　概　　説

前述のように解析空間を要素分割する際，分割の自由度を多少減らしても節点の配置をある規則下において単純化し，データの自動的な入力ができるよう配慮することが3次元解析では実用上特に重要である。また立体的解析領域といえども，どの方向にも同じ未知量変化率がある場合はむしろ少なく，解析空間の，ある面内方向には分割数を多くして解析精度を高くし，それに鉛直な方向には荒い分割をして精度のバランスを計る場合が多い。あるいは，解析対象の形状そのものが，そのような分割に適している場合がある。

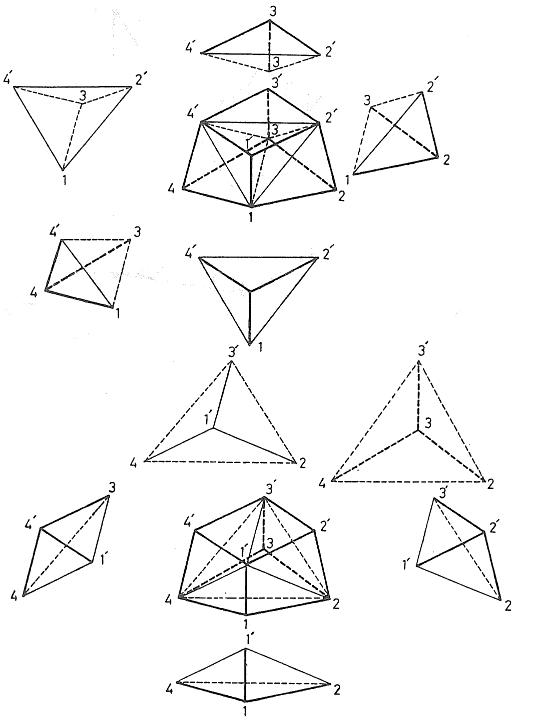

Fig. 2　6面体要素と2通りの5つの4面体への分割

ここに述べる方法は，そのような分割の一例として，xy平面上におかれた解析対象をその平面上では3角形要素分割を行い，それと直交するz方向では厚さの変化しうるいくつかの層に分割するものである。その結果，解析対象の分割自由度をxy平面的には少なくとも，従来の2次元分割と同程度に許しながら，座標に関する入力データを大幅に減らすことができ，また節点配置の規則性により計算結果の整理，表示が容易となる。

このときつくられる立体要素はFig. 3に示すような5面体アイソパラメトリック(三角柱)要素となる。要素の上，下面は3角柱，3つの側面はおのおの鉛直方向の1対の辺が平行な4辺形である。

(2)　形状関数

Fig. 3の3角柱要素の各頂点に1つずつの節点を設け，要素内部のポテンシャルを1次式で表わすものとする。

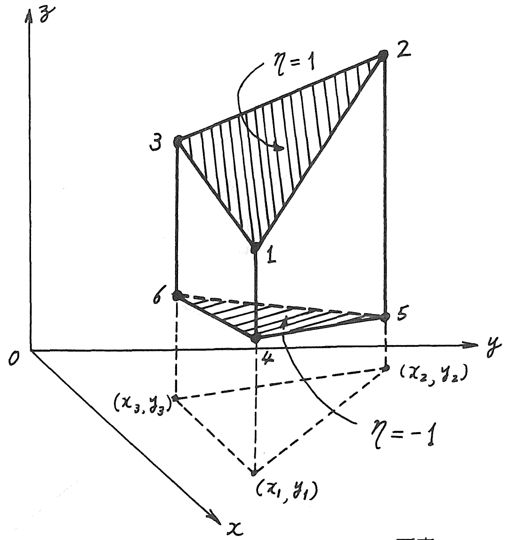

Fig. 3　三角柱アイソパラメトリック要素

このとき形状関数は無次元座標を用いてつぎのように表わされる。[3)]

$$N_i=\frac{1}{2}\zeta_i(1+\eta_i\cdot\eta)\quad (i=1\sim6,\ 節点番号)\tag{4・1}$$

ここで，ζは3角柱のx，y投影平面上の3角形面積座標，ηは三角柱の上面で1，底面で−1となるような無次元座標。したがって，$\eta_1=\eta_2=\eta_3=1$，$\eta_4=\eta_5=\eta_6=-1$。

Fig. 3 の要素に対して $N_1\sim N_6$ は次のように書ける。

$$\begin{aligned}N_1&=\frac{1}{2}\zeta_1(1+\eta),\quad & N_4&=\frac{1}{2}\zeta_1(1-\eta)\\ N_2&=\frac{1}{2}\zeta_2(1+\eta),\quad & N_5&=\frac{1}{2}\zeta_2(1-\eta)\\ N_3&=\frac{1}{2}\zeta_3(1+\eta),\quad & N_6&=\frac{1}{2}\zeta_3(1-\eta)\end{aligned}\tag{4・2}$$

$$\zeta_3=1-\zeta_1-\zeta_2$$

x，y，zとζ，ηとの関係はつぎのようである。

$$\begin{aligned}x&=\langle N\rangle\{x_i\}\\&=(N_1x_1+N_2x_2+N_3x_3)+(N_4x_4+N_5x_5+N_6x_6)\\&=\zeta_1x_1+\zeta_2x_2+\zeta_3x_3\end{aligned}\tag{4・3)a}$$

$$\begin{aligned}y&=\langle N\rangle\{y_i\}\\&=\zeta_1y_1+\zeta_2y_2+\zeta_3y_3\end{aligned}\tag{4・3)b}$$

$$\begin{aligned}z&=\langle N\rangle\{z_i\}\\&=\frac{1}{2}\{\zeta_1(z_1+z_4)+\zeta_2(z_2+z_5)+\zeta_3(z_3+z_6)\\&\quad+\zeta_1\eta(z_1-z_4)+\zeta_2\eta(z_2-z_5)+\zeta_3\eta(z_3-z_6)\}\end{aligned}\tag{4・3)c}$$

ここに，x_i，y_i，$z_i(i=1\sim6)$は第i節点の座標値，

$$x_{i+3}=x_i,\quad y_{i+3}=y_i\quad(i=1\sim3)\tag{4・3)d}$$

要素内部ポテンシャルϕは$\langle N\rangle$と節点ポテンシャル$\{\phi_i\}$とで表わされる。

$$\phi=\langle N\rangle\{\phi_i\}\tag{4・4}$$

(3)　要素フィールドマトリックス

式(2・2)における形状関数$\langle N\rangle$は式(4・1)のように無次元座標ζ，ηで与えられているから，偏微分に際し，x，y，zのζ，ηへの変換マトリックス〔J〕（ヤコビアン）が必要となる。すなわち，

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial\zeta_1}\\ \dfrac{\partial}{\partial\zeta_2}\\ \dfrac{\partial}{\partial\eta}\end{Bmatrix}=[J]\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\end{Bmatrix}\tag{4・5}$$

この逆関係$[J]^{-1}$を用いて，式(7)を変形すれば，

$$\{g\}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\end{Bmatrix}=[J]^{-1}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\phi}{\partial\zeta_1}\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\zeta_2}\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\eta}\end{Bmatrix}=[J]^{-1}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\langle N\rangle}{\partial\zeta_1}\\ \dfrac{\partial\langle N\rangle}{\partial\zeta_1}\\ \dfrac{\partial\langle N\rangle}{\partial\eta}\end{Bmatrix}\{\phi\}$$

$$=[J]^{-1}[P]\{\phi\}\tag{4・6}$$

ここで，〔P〕の各要素は式(4・2)をそれぞれζ_1，ζ_2，ηで偏微分して得られる。すなわち，

$$[P]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+\eta & 0 & -(1+\eta) & 1-\eta & 0 & -(1-\eta)\\ 0 & 1+\eta & -(1+\eta) & 0 & 1-\eta & -(1-\eta)\\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & -\zeta_1 & -\zeta_2 & -\zeta_3\end{bmatrix}\tag{4・7}$$

よって，

$$[B]=[J]^{-1}[P]\tag{4・8}$$

これを式(2・2)aに代入すると要素フィールドマトリックスは次式となる。

$$[K^{(e)}]=\int_V[P]^T[J^{-1}]^T[D][J^{-1}][P]\,dV\tag{4・9}$$

以下に$[J^{-1}]$，および$[K^{(e)}]$の誘導過程と結果を示す。

(4)　ヤコビアン〔J〕，および$[J]^{-1}$

式(8)の〔J〕は次式で示される。[4)]

$$[J]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\zeta_1} & \dfrac{\partial y}{\partial\zeta_1} & \dfrac{\partial z}{\partial\zeta_1}\\ \dfrac{\partial x}{\partial\zeta_2} & \dfrac{\partial y}{\partial\zeta_2} & \dfrac{\partial z}{\partial\zeta_2}\\ \dfrac{\partial x}{\partial\zeta_3} & \dfrac{\partial y}{\partial\zeta_3} & \dfrac{\partial z}{\partial\zeta_3}\end{bmatrix}\tag{4・10}$$

マトリックスの各要素は式(4・3)をそれぞれζ_1，ζ_2，ηで偏微分してつぎのように求められる。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial x}{\partial\zeta_1}=x_1-x_3=x_{13},\quad &&\frac{\partial x}{\partial\zeta_2}=x_{23},\quad &&\frac{\partial x}{\partial\eta}=0\\ &\frac{\partial y}{\partial\zeta_1}=y_1-y_3=y_{13},\quad &&\frac{\partial y}{\partial\zeta_2}=y_{23},\quad &&\frac{\partial y}{\partial\eta}=0\end{aligned}\tag{4・11}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta_1}=\frac{1}{2}\{(z_{13}+z_{46})+(z_{13}-z_{46})\,\eta\}=w_1+w_2\eta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta_2}=\frac{1}{2}\{(z_{23}+z_{56})+(z_{23}-z_{56})\,\eta\}=w_3+w_4\eta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta}=\frac{1}{2}(z_{14}\zeta_1+z_{25}\zeta_2+z_{36}\zeta_3)=h_1\zeta_1+h_2\zeta_2+h_3\zeta_3=h_i\zeta_i$$

ここで，x_{ij}，y_{ij}，z_{ij}（i，$j=1\sim3$）はそれぞれx_i-x_j，y_i-y_j，z_i-z_jを表わす。また，次の記号を用いる。

$$w_1=\frac{1}{2}(z_{13}+z_{46}),\quad w_2=\frac{1}{2}(z_{13}-z_{46}),\quad w_3=\frac{1}{2}(z_{23}+z_{56}),\quad w_4=\frac{1}{2}(z_{23}-z_{56})$$

$$h_1=z_{13}/2,\quad h_2=z_{25}/2,\quad h_3=z_{36}/2$$

以上をマトリックスの形に整理して，

$$[\mathrm{J}]=\begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} & w_1+w_2\eta \\ x_{23} & y_{23} & w_3+w_4\eta \\ 0 & 0 & h_i\zeta_i \end{bmatrix} \tag{4・12}$$

〔J〕の逆マトリックス〔J〕$^{-1}$は演算により次のように求められる。

$$[\mathrm{J}]^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & \gamma_1 \\ x_{32} & x_{13} & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix} \tag{4・13}$$

ここに，

$\Delta=x_{13}y_{23}-x_{23}y_{13}=2\cdot\mathrm{A}=2\times$（$x$，$y$平面上の三角形の面積）

$$\gamma_1=\{(y_{13}w_3-y_{23}w_1)+(y_{13}w_4-y_{23}w_2)\eta\}/h_i\zeta_i=(a_1+b_1\eta)/h_i\zeta_i$$

$$\gamma_2=-\{(x_{31}w_3-x_{32}w_1)+(x_{31}w_4-x_{32}w_2)\eta\}/h_i\zeta_i=(a_2+b_2\eta)/h_i\zeta_i$$

$$\gamma_3=\Delta/h_i\zeta_i$$

ここに，$a_1=y_{13}w_3-y_{23}w_1$，　$b_1=y_{13}w_4-y_{23}w_2$，

$a_2=-(x_{31}w_3-x_{32}w_1)$，　$b_2=-(x_{31}w_4-x_{32}w_2)$

(5)　〔B〕=〔J〕$^{-1}$〔P〕の計算

〔B〕マトリックスは式(4・7)，(4・13)より次のように求められる。結果は後の計算の便のためηを含む項(〔$\mathrm{B_1}$〕)とζ_iを含む項〔$\mathrm{B_2}$〕とに分けておく。

$$[\mathrm{B}]=[\mathrm{J}]^{-1}[\mathrm{P}]=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & \gamma_1 \\ x_{32} & x_{13} & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \Delta/h_i\zeta_i \end{bmatrix}$$
$$\times\begin{bmatrix} 1+\eta & 0 & -(1+\eta) & 1-\eta & 0 & -(1-\eta) \\ 0 & 1+\eta & -(1+\eta) & 0 & 1-\eta & -(1-\eta) \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & -\zeta_1 & -\zeta_2 & -\zeta_3 \end{bmatrix}$$
$$=[\mathrm{B_1}]+[\mathrm{B_2}] \tag{4・14}$$

ここに，

$$[\mathrm{B_1}]=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} y_{23}(1+\eta) & y_{31}(1+\eta) & y_{12}(1+\eta) & y_{23}(1-\eta) & y_{31}(1-\eta) & y_{12}(1-\eta) \\ x_{32}(1+\eta) & x_{13}(1+\eta) & x_{21}(1+\eta) & x_{32}(1-\eta) & x_{13}(1-\eta) & x_{21}(1-\eta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4・15}$$

$$[\mathrm{B_2}]=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \zeta_1\gamma_1 & \zeta_2\gamma_1 & \zeta_3\gamma_1 & -\zeta_1\gamma_1 & -\zeta_2\gamma_1 & -\zeta_3\gamma_1 \\ \zeta_1\gamma_2 & \zeta_2\gamma_2 & \zeta_3\gamma_2 & -\zeta_1\gamma_2 & -\zeta_2\gamma_2 & -\zeta_3\gamma_2 \\ \zeta_1\gamma_3 & \zeta_2\gamma_3 & \zeta_3\gamma_3 & -\zeta_1\gamma_3 & -\zeta_2\gamma_3 & -\zeta_3\gamma_3 \end{bmatrix} \tag{4・16}$$

(6)　〔$\mathrm{K^{(e)}}$〕$=\int$〔B〕$^{\mathrm{T}}$〔D〕〔B〕$d\mathrm{V}$の計算

式(4・14)より

$$[\mathrm{K^{(e)}}]=\int[\mathrm{B}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{D}][\mathrm{B}]\,d\mathrm{V}=\int([\mathrm{B_1}]^{\mathrm{T}}+[\mathrm{B_2}]^{\mathrm{T}})[\mathrm{D}]\times([\mathrm{B_1}]+[\mathrm{B_2}])\,d\mathrm{V}=\int[\mathrm{B_1}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{D}][\mathrm{B_1}]\,d\mathrm{V}+\int[\mathrm{B_2}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{D}][\mathrm{B_1}]\,d\mathrm{V}+\int[\mathrm{B_1}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{D}][\mathrm{B_2}]\,d\mathrm{V}+\int[\mathrm{B_2}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{D}][\mathrm{B_2}]\,d\mathrm{V}=[\mathrm{K_{11}}]+[\mathrm{K_{21}}]+[\mathrm{K_{12}}]+[\mathrm{K_{22}}] \tag{4・17}$$

ここで，$[\mathrm{K_{12}}]=[\mathrm{B_1}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{D}][\mathrm{B_2}]=([\mathrm{B_2}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{D}][\mathrm{B_1}])^{\mathrm{T}}=[\mathrm{K_{21}}]^{\mathrm{T}}$

また，

$$d\mathrm{V}=dx\,dy\,dz=d\mathrm{A}\frac{\partial z}{\partial\eta}d\eta=h_i\zeta_i\,d\mathrm{A}\,d\eta \tag{4・18}$$

面積座標の公式[5]より

$$\int\zeta_i\,d\mathrm{A}=\frac{\mathrm{A}}{3}\qquad(i=1\sim3) \tag{4・19}$$

式(4・17)中の各マトリックスの積分計算は以下のようになる。

・$[\mathrm{K_{11}}]=\int[\mathrm{B_1}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{D}][\mathrm{B_1}]\,d\mathrm{V}$

$$=\frac{k_x}{\Delta^2}\int\left[\begin{array}{c:c} [\mathrm{Y_{11}}](1+\eta)^2 & [\mathrm{Y_{11}}](1-\eta^2) \\ \hdashline [\mathrm{Y_{11}}](1-\eta^2) & [\mathrm{Y_{11}}](1-\eta)^2 \end{array}\right]d\mathrm{V}+\frac{k_y}{\Delta^2}\int\left[\begin{array}{c:c} [\mathrm{X_{11}}](1+\eta)^2 & [\mathrm{X_{11}}](1-\eta^2) \\ \hdashline [\mathrm{X_{11}}](1-\eta^2) & [\mathrm{X_{11}}](1-\eta)^2 \end{array}\right]d\mathrm{V} \tag{4・20}$$

ここに，

$$[\mathrm{Y_{11}}]=\begin{bmatrix} y_{23}^2 & y_{23}y_{31} & y_{23}y_{12} \\ y_{31}y_{23} & y_{31}^2 & y_{31}y_{12} \\ y_{12}y_{23} & y_{12}y_{31} & y_{12}^2 \end{bmatrix},$$

$$[\mathrm{X_{11}}]=\begin{bmatrix} x_{23}^2 & x_{23}x_{31} & x_{23}x_{12} \\ x_{31}x_{23} & x_{31}^2 & x_{31}x_{12} \\ x_{12}x_{23} & x_{12}x_{31} & x_{12}^2 \end{bmatrix}$$

上式中のζ，ηに関する積分（Appendix参照）を行い，

結果を整理すると次のようになる。

$$[K_{11}]=\frac{h}{9A}\left(k_x\begin{bmatrix}2\times[Y_{11}] & [Y_{11}]\\ [Y_{11}] & 2\times[Y_{11}]\end{bmatrix} + k_y\begin{bmatrix}2\times[X_{11}] & [X_{11}]\\ [X_{11}] & 2\times[X_{11}]\end{bmatrix}\right) \qquad (4\cdot21)$$

・$[K_{21}]=\int[B_2]^T[D][B_1]\,dV=$

$$=\frac{k_x}{\Delta^2}\int\gamma_1\left[\begin{array}{ccc|ccc}
y_{23}(1+\eta) & y_{31}(1+\eta) & y_{12}(1+\eta) & y_{23}(1-\eta) & y_{31}(1-\eta) & y_{12}(1-\eta)\\
y_{23}(1+\eta) & y_{31}(1+\eta) & y_{12}(1+\eta) & y_{23}(1-\eta) & y_{31}(1-\eta) & y_{12}(1-\eta)\\
y_{23}(1+\eta) & y_{31}(1+\eta) & y_{12}(1+\eta) & y_{23}(1-\eta) & y_{31}(1-\eta) & y_{12}(1-\eta)\\ \hline
-y_{23}(1+\eta) & -y_{31}(1+\eta) & -y_{12}(1+\eta) & -y_{23}(1-\eta) & -y_{31}(1-\eta) & -y_{12}(1-\eta)\\
-y_{23}(1+\eta) & -y_{31}(1+\eta) & -y_{12}(1+\eta) & -y_{23}(1-\eta) & -y_{31}(1-\eta) & -y_{12}(1-\eta)\\
-y_{23}(1+\eta) & -y_{31}(1+\eta) & -y_{12}(1+\eta) & -y_{23}(1-\eta) & -y_{31}(1-\eta) & -y_{12}(1-\eta)
\end{array}\right]dV+$$

$$\frac{k_y}{\Delta^2}\int\gamma_2\left[\begin{array}{ccc|ccc}
x_{32}(1+\eta) & x_{13}(1+\eta) & x_{21}(1+\eta) & x_{32}(1-\eta) & x_{13}(1-\eta) & x_{21}(1-\eta)\\
x_{32}(1+\eta) & x_{13}(1+\eta) & x_{21}(1+\eta) & x_{32}(1-\eta) & x_{13}(1-\eta) & x_{21}(1-\eta)\\
x_{32}(1+\eta) & x_{13}(1+\eta) & x_{21}(1+\eta) & x_{32}(1-\eta) & x_{13}(1-\eta) & x_{21}(1-\eta)\\ \hline
-x_{32}(1+\eta) & -x_{13}(1+\eta) & -x_{21}(1+\eta) & -x_{32}(1-\eta) & -x_{13}(1-\eta) & -x_{21}(1-\eta)\\
-x_{32}(1+\eta) & -x_{13}(1+\eta) & -x_{21}(1+\eta) & -x_{32}(1-\eta) & -x_{13}(1-\eta) & -x_{21}(1-\eta)\\
-x_{32}(1+\eta) & -x_{13}(1+\eta) & -x_{21}(1+\eta) & -x_{32}(1-\eta) & -x_{13}(1-\eta) & -x_{21}(1-\eta)
\end{array}\right]dV \qquad (4\cdot22)$$

式(4・22)のζ，ηに関する積分はAppendixに示すように計算でき，それを用いると〔K_{21}〕に対し，次の結果が得られる。

$$[K_{21}]=\frac{k_x}{6A}\left[\begin{array}{c|c}
[Y_{21}](a_1+b_1/3) & [Y_{21}](a_1-b_1/3)\\ \hline
-[Y_{21}](a_1+b_1/3) & -[Y_{21}](a_1-b_1/3)
\end{array}\right]
+\frac{k_y}{6A}\left[\begin{array}{c|c}
[X_{21}](a_2+b_2/3) & [X_{21}](a_2-b_2/3)\\ \hline
-[X_{21}](a_2+b_2/3) & -[X_{21}](a_2-b_2/3)
\end{array}\right] \qquad (4\cdot23)a$$

ここに，

$$[Y_{21}]=\begin{bmatrix}y_{23} & y_{31} & y_{12}\\ y_{23} & y_{31} & y_{12}\\ y_{23} & y_{31} & y_{12}\end{bmatrix},$$

$$[X_{21}]=\begin{bmatrix}x_{32} & x_{13} & x_{21}\\ x_{32} & x_{13} & x_{21}\\ x_{32} & x_{13} & x_{21}\end{bmatrix} \qquad (4\cdot23)b$$

$$a_1=-(y_{23}g_1+y_{31}g_2+y_{12}g_3)$$
$$b_1=-(y_{23}h_1+y_{31}h_2+y_{12}+_3)$$
$$a_2=(x_{32}g_1+x_{13}g_2+x_{21}g_3)$$
$$b_2=(x_{32}h_1+x_{13}h_2+x_{21}h_3)$$

・$[K_{22}]=\int[B_2]^T[D][B_2]\,dV=$

$$=\frac{k_x}{4A^2}\int\gamma_1^2\left[\begin{array}{c|c}[T] & -[T]\\ \hline -[T] & [T]\end{array}\right]dV
+\frac{k_y}{4A^2}\int\gamma_2^2\left[\begin{array}{c|c}[T] & -[T]\\ \hline -[T] & [T]\end{array}\right]dV
+\frac{k_z}{4A^2}\int\gamma_3^2\left[\begin{array}{c|c}[T] & -[T]\\ \hline -[T] & [T]\end{array}\right]dV \qquad (4\cdot24)a$$

ここに，

$$[T]=\begin{bmatrix}\zeta_1^2 & \zeta_1\zeta_2 & \zeta_1\zeta_3\\ \zeta_2\zeta_1 & \zeta_2^2 & \zeta_2\zeta_3\\ \zeta_3\zeta_1 & \zeta_3\zeta_2 & \zeta_3^2\end{bmatrix} \qquad (4\cdot24)b$$

上式中の積分（Appendix参照)を行うと，次の結果が求められる。

$$[K_{22}]=\left\{\frac{k_x}{A}(a_1^2+b_1^2/3)+\frac{k_y}{A}(a_2^2+b_2^2/3)+4Ak_z\right\}\begin{bmatrix}t_{11} & t_{12} & t_{13}\\ & t_{22} & t_{23}\\ \text{sym.} & & t_{33}\end{bmatrix} \qquad (4\cdot25)$$

ここに，

$$t_{11}=\frac{-3}{32h}+\frac{5}{96}\left(\frac{9}{H_1}+\frac{1}{H_2}+\frac{1}{H_3}\right)$$

$$t_{22}=\frac{-3}{32h}+\frac{5}{96}\left(\frac{1}{H_1}+\frac{9}{H_2}+\frac{1}{H_3}\right)$$

$$t_{33}=\frac{-3}{32h}+\frac{5}{96}\left(\frac{1}{H_1}+\frac{1}{H_2}+\frac{9}{H_3}\right)$$

$$t_{12}=\frac{-3}{32h}+\frac{5}{96}\left(\frac{3}{H_1}+\frac{3}{H_2}+\frac{1}{H_3}\right)$$

$$t_{13}=\frac{-3}{32h}+\frac{5}{96}\left(\frac{3}{H_1}+\frac{1}{H_2}+\frac{3}{H_3}\right)$$

$$t_{23}=\frac{-3}{32h}+\frac{5}{96}\left(\frac{1}{H_1}+\frac{3}{H_2}+\frac{3}{H_3}\right)$$

$$H_1=h+2h_1$$
$$H_2=h+2h_2$$
$$H_3=h+2h_3$$

4.　あとがき

本報では紙数の制限もあり，式(2・1)の外部作用$\{F^{(e)}\}$項や実問題への適用についての検討はできなかった。これについてはプログラム例とあわせて，次の機会に述べるつもりである。

Appendix　ζ，ηに関する要素内積分

・$[K_{11}]$の計算における積分

$$\int_A h_i \zeta_i \, dA = \frac{A}{3}(h_1+h_2+h_3) = \frac{A}{3}h$$

ここに，$h = h_1 + h_2 + h_3$　(A・1)

$$\int_{-1}^{1}(1+\eta)^2 d\eta = \frac{8}{3},\quad \int_{-1}^{1}(1-\eta^2)\, d\eta = \frac{4}{3},$$

$$\int_{-1}^{1}(1-\eta)^2 d\eta = \frac{8}{3} \qquad \text{(A・2)}$$

・$[K_{21}]$の計算における積分

$$\int \zeta_i \gamma_1 (1\pm\eta)\, dV = \int_A \zeta_i \, dA \int_{-1}^{1}(a_1+b_1\eta)(1\pm\eta) d\eta$$

$$= \frac{2}{3}A(a_1 \pm b_1/3) \qquad \text{(A・3)}$$

$$\int \zeta_i \gamma_2 (1\pm\eta)\, dV = \int_A \zeta_i \, dA \int_{-1}^{1}(a_2+b_2\eta)(1\pm\eta)\, d\eta$$

$$= \frac{2}{3}A(a_2 \pm b_2/3) \qquad \text{(A・4)}$$

・$[K_{22}]$における積分

$$\int \gamma_1^2 \zeta_i \zeta_j \, dV = \int (a_1+b_1\eta)^2 d\eta$$

$$\times \int \frac{\zeta_i \zeta_j}{(\zeta_1 h_1 + \zeta_2 h_2 + \zeta_3 h_3)} dA = c_1 s_{ij} \qquad \text{(A・5)}$$

$$\int \gamma_2^2 \zeta_i \zeta_j \, dV = \int (a_1+b_1\eta)^2 \, d\eta$$

$$\times \int \frac{\zeta_i \zeta_j}{(\zeta_1 h_1 + \zeta_2 h_2 + \zeta_3 h_3)} dA = c_2 s_{ij} \qquad \text{(A・6)}$$

ここに，

$$c_1 = \int (a_1 + b_1\eta)^2 \, d\eta = 2(a_1^2 + b_1^2/3),$$

$$c_2 = \int (a_2 + b_2\eta)^2 \, d\eta = 2(a_2^2 + b_2^2/3)$$

s_{ij}の積分計算にはつぎの三角形面積座標に関する3次のガウスの数値積分公式[5]を用いることにする。

$$I = \sum_{l=1}^{4} w_l f_{ij}^{\,l}(\zeta_1^{\,l},\ \zeta_2^{\,l},\ \zeta_3^{\,l}) \qquad \text{(A・7)}$$

ここにw_lは第ℓ積分点の重み，$\zeta_1^{\,l}$，$\zeta_2^{\,l}$，$\zeta_3^{\,l}$はζ_1，ζ_2，ζ_3に関する第ℓ積分点。

また，

$$f_{ij} = \frac{\zeta_i \zeta_j}{\zeta_1 h_1 + \zeta_2 h_2 + \zeta_3 h_3} \qquad (i=1\sim3,\ j=1,3) \qquad \text{(A・8)}$$

であるから，公式に与えられた数値より，たとえば，$i=1$，$j=2$のときには次の積分結果が得られる。

$$I_{12} = \sum_{l=1}^{4} w_l f_{12}^{\,l} = 2A\left[\frac{-9}{32} \times \frac{(1/3)\cdot(1/3)}{(h_1+h_2+h_3)\cdot(1/3)}\right.$$

$$+\frac{25}{96}\left(\frac{(3/5)\cdot(1/5)}{(3h_1+h_2+h_3)(1/5)} + \frac{(3/5)\cdot(1/5)}{(h_1+3h_2+h_3)(1/5)}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(1/5)\cdot(1/5)}{(h_1+h_2+3h_3)(1/5)}\right)\right] = 2A\left[\frac{-3}{32h} + \frac{5}{96}\left(\frac{3}{2h_1+h}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{3}{2h_2+h} + \frac{1}{2h_3+h}\right)\right] = 2A\, t_{12} \qquad \text{(A・9)}$$

他のI，Jの値に対しても同様に計算でき，$I_{ij} = 2At_{ij}$を得る。

ここにt_{ij}は本文中式(　)に示す式を表わす。

参考文献

1) 木村勝行，青木徹彦：熱伝導と場の問題の有限要素法，愛知工業大学研究報告第14号B，383—389，1979
2) ツィエキーヴィッツ／チューン，吉識雅夫監訳：マトリックス有限要素法，87—89，培風館，東京，1970
3) 山田嘉昭：マトリックス法の応用，57，東京大学出版会，東京，1972
4) 寺沢寛一：自然科学者のための数学概論，22，岩波書店，東京，1976
5) コナー／ブレビア，奥村敏恵監訳：流体解析への有限要素法の応用，227，サイエンス社，東京，1978

（受理　昭和57年1月16日）