(p, q) 論理関数の出力s固定, p-s閉集合の s-(p, q) 論理完全性について

羽　賀　隆　洋

s-(p, q)-Logical Completeness for the Output s-Coherent, (p-s)-Closed Set of the (p, q)-Logical Functions

Takahiro HAGA

The multiple-valued logic (M-V Logic) has been studied in various points of view. Above all, as VLSI has become important in constructing computers, problems such as the complexity of the interconnections in VLSI and the severe restriction of the number of pins have become very important, and their solution is expected to require, for example, M-V Logic.

Therefore, we have proposed the idea of the p-valued input, q-valued output logic ((p, q)-Logic), where $2 \leqq q \leqq p$, $3 \leqq p$. The idea stems from the considerations that (1) the inputs of the threshold elements can be very easily extended to the p-valued case, while (2) the extention of the outputs of the threshold elements to the p-valued case is difficult because the number of necessary thresholds increases.

In this paper, the condition of the s-(p, q)-logical completeness for the output s-coherent, (p-s)-closed set of the (p, q)-logical functions is discussed. As a result, the condition is seen to be almost equivalent to the q-valued one. From the result, it may be expected that the studies and the costs of networks in M-V Logic are almostly reduced to the 2-valued one by selecting $q \gtrsim 2$.

1. まえがき

近年, 論理回路の大規模集積化につれて, VLSIの配線量, 面積などの低減化のため多値論理の研究, 応用がさかんとなりつつある。我々は多値化の容易な素子の一つであるしきい素子の多値(p値)への拡張を検討してきたが, 一般にp-1個のしきい値を要するため, 値pの増大とともに構成費用が増大するという欠点がある。そこで, p値入力, q値出力(以下, (p, q)と略記する)論理の考えに至ったわけである。ただし, $2 \leqq q \leqq p$, $3 \leqq p$とする。

すなわち, (p, q)論理しきい素子においてはq-1個のしきい値を要するが, 値qを小さく選べば, 従来の2値の場合よりもわずかの費用増大ですむであろうと期待される。p値論理回路の構成においては, このような(p, q)論理素子の他になんらかのp値論理素子が必要となることはもちろんであるが, 回路の大部分を(p, q)論理素子により構成し, 要所でp値論理素子を用いれば, 回路全体の費用は低減化されるであろう。

その際, 利用できる(p, q)論理素子の集合が, (p, q)論理完全であることが望ましい。例えば, 容易に実現可能なアナログ加算器(しきい値の個数が0のしきい素子ともみなされる)をp値論理回路の出力素子として用いるとき, 任意のp値論理関数が実現されるためには, 利用できる(p, q)論理素子から任意の(p, q)論理関数が実現される((p, q)論理完全である)ことが十分条件となる。そこで, 本文では, 特別な場合ではあるが, s-(p, q)論理完全性の必要十分条件を与える。

情報通信工学科

2．諸定義

入力値に対応する p 個の論理値を

$$L=\{1,\ \cdots,\ p\} \tag{1}$$

と表わし，出力値に対応する q 個の論理値を

$$J=\{i_1,\ \cdots,\ i_q\}\subseteq L \tag{2}$$

$$(1\leqq i_1<\cdots<i_q\leqq p)$$

とする。(p, q) 論理関数 f とは，写像

$$f: L^n \xrightarrow{\text{into}} J\ (\text{for some } J) \tag{3}$$

である。特に，

$$i_1=1,\ \cdots,\ i_s=s \tag{4}$$

$$(s+1\leqq i_{s+1}<\cdots<i_q\leqq p)$$

である J を $J^{(s)}$ と表わす。

［定義1］(p, q)論理関数の集合 F が，出力 s 固定，p-s 閉であるとは，以下のときをいう（但し，$o\leqq s\lneqq q$）：1, …, s 以外に $s+1\leqq i_1<\cdots<i_r\leqq p$ ($1\leqq r\leqq q-s$) を出力する (p, q) 論理関数 f が F に含まれていれば，$i_1, \cdots, i_r$ を各々 $s+1\leqq i_1'\leqq\cdots\leqq i_r'\leqq p$ で置き換えた (p, q) 論理関数 f′ がすべて F に含まれる。

この定義1において，f がしきい関数であれば，f′ のすべてが同一重みのしきい関数であることに注意する。

［定義2］以下のとき，(p, q) 論理関数 f は (j_1, j_2) 縮退という：任意の i=1, …, n に対して，

$$f(x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ j_1,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_n)$$
$$=f(x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ j_2,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_n) \tag{5}$$
$$(x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_n\in L,\ 1\leqq j_1<j_2\leqq p)$$

(p, q) 論理関数の集合 F が (j_1, j_2) 縮退であるとは，F に含まれているすべての f が (j_1, j_2) 縮退であるときをいう。F が非縮退であるとは，任意の $1\leqq j_1<j_2\leqq p$ に対して (j_1, j_2) 非縮退の f が F 中に存在するときをいう。

［定義3］(p, q)論理関数 f から導出される q 値論理関数 f* を以下のように定める：

$$f^*(x_1,\cdots,x_n)=\varphi^{-1}_{J^{(s)}}(f(\varphi_{J_1^{(s)}}(x_1),\cdots,\varphi_{J_n^{(s)}}(x_n))) \tag{6}$$

但し，$OUT(f)\subseteq J^{(S)}$, $x_1, \cdots, x_n\in Q=\{1,\cdots,q\}$.

ここに，一般に，

$$OUT(f)=\{i|f(\boldsymbol{x})=i \text{ for some } \boldsymbol{x}\in L^n\} \tag{7}$$

又，一般に，

$$\varphi_{J^{(s)}}: Q\xrightarrow{1:1\ \ \text{onto}}J^{(S)} \tag{8}$$

$$(\varphi_{J^{(s)}}(i)<\varphi_{J^{(s)}}(j) \text{ for } i<j\in Q)$$

そして，

$$F^*=\{f^*|\text{for every } J^{(S)},\ J_1^{(S)},\ \cdots,\ J_n^{(S)};$$
$$OUT(f)\subseteq J^{(S)},\ f\in F\} \tag{9}$$

と定める。

［定義4］出力 s 固定，p-s 閉集合 F が s-(p, q) 論理完全であるとは，$OUT(f)\subseteq J^{(s)}$ (for some $J^{(s)}$) なる (p, q) 論理関数 f がすべて [F] に属するときをいう。但し，一般に，[F] は F に含まれる論理関数のみを用いて合成される論理関数の全体から成る集合とする。

3．s-(p, q) 論理完全性の条件

ここでは，s を任意に固定して考える。但し，

$$0\leqq s\lneqq q \tag{10}$$

［定理1］出力 s 固定，p-s 閉なる (p, q) 論理関数の集合 F が s-(p, q) 論理完全であるための必要十分条件は，以下の2つの条件が成立つことである：

(1)　F* が q 値論理完全である。
(2)　F が非縮退である。

（証明）付録1に示す。

［例1］p=4，q=2，s=1 の場合を考える。$J^{(s)}$ は {1, 2}, {1, 3}, {1, 4} のいずれかである。図1の f において，$J_1^{(s)}=\{1, 4\}$, $J_2^{(s)}=\{1, 2\}$ とすれば $f^*=\overline{x_1\cdot x_2}$ (NAND) となり，f* は q=2 値論理完全である。又，f は非縮退である。従って，F={f, f′, f″} は 1-(4, 2) 論理完全である。但し，f′, f″ は，f の出力値 2 を各々 3, 4 で置き換えて得られる (4, 2) 論理関数とする。

X_2 \ X_1	①	2	3	④
4	1	1	1	1
3	1	1	1	1
②	②	2	2	①
①	②	2	2	②

図1　1－(4, 2) 論理完全な F を与える f の例

この定理１から，s-(p，q)論理完全性はほぼ q 値論理完全性にいい換えられることが知られる。これは，直観的にも妥当な結果であろう。なお，s＝０の場合は，従来の出力（全）閉[1)]の場合に一致する。

パラメータ s の値が大であるほど，f ∈ F なる f を論理素子として実現する費用は小となるであろうが，逆に，s が小であるほど F の論理的能力（例えば，F* に含まれる q 値論理関数の豊富さなど）は大となろう（付録２参照）。従って，実際の応用においては，最適な s の値が存在し，技術の進歩とともにその最適値は変化していくであろう。これは，p，q の値自体についてもいえることである[2)]。

４．s＝q（出力（全）固定）の場合

s＝q の場合には，以下の定理２が成立つことが知られている[3)]。但し，$J^{(q)}=Q=\{1,\cdots,q\}$ であることに注意する。

［定義５］（p，q）論理関数の集合 F が出力（全）固定であるとは，

$$OUT(F)=\bigcup_{f\in F} OUT(f)\subseteq Q \tag{11}$$

のときをいう。

［定義６］$OUT(f)\subseteq Q$ なる（p，q）論理関数 f から導出される q 値論理関数 f* を，

$$f^*(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_n)\ (x_1,\cdots,x_n\in Q) \tag{12}$$

とする。そして，

$$F^*=\{f^* \mid f\in F\} \tag{13}$$

とする。

［定義７］

$$\hat{F}=\{f(\overset{1}{x_1},\cdots,\overset{l_1}{I_{k_1}},\cdots,\overset{l_m}{I_{k_m}},\cdots,\overset{n}{x_n}) \mid 1\leqq l_1<\cdots<l_m\leqq n;\ k_1,\cdots,k_m\in L-Q;\ 0\leqq m\leqq n;\ f\in F\} \tag{14}$$

とする。ここに，一般に，$I_i\equiv i$ は（p，q）論理定数関数とする（$i\in L$）。

［定義８］出力固定集合 F が q-（p，q）論理完全であるとは，$OUT(f)\subseteq Q$ なる f がすべて [F] に含まれるときをいう。

［定理２］（p，q）論理定数関数 $I_{q+1},\cdots,I_p$ が使用できるとする。そのとき，出力固定 F が q-（p，q）論理完全であるための必要十分条件は，次の２つの条件が成立つことである：

X_3	X_2	X_1: ①	②	3
1	1	1	1	1
	2	1	1	1
	3	1	1	1
2	1	1	1	1
	2	1	1	1
	3	1	1	1
$\boxed{3}$	①	②	②	1
	②	②	①	1
	3	1	1	1

図２　２－（３，２）論理完全な F を与える f の例

(1)　$(\hat{F})^*$ が q 値論理完全である。
(2)　F が非縮退である。

［例２］p＝３，q＝２の場合を考える（s＝q＝2）。$J^{(q)}=Q=\{1,2\}$ である。F＝{f}，かつ，I_3 が使用可能，とすれば，$f(x_1,x_2,I_3)\in\hat{F}$ であり，$\overline{x_1\cdot x_2}$ (NAND) $\in(\hat{F})^*$ となる。又，f は非縮退である。従って，F は２－（３，２）論理完全である。

５．むすび

本文では，（p，q）論理関数の特別な集合である，出力 s 固定，p-s 閉集合 F の s-（p，q）論理完全性の必要十分条件を与えた。その結果，s-（p，q）論理完全性はほぼ q 値論理完全性にいい換えられることが知られた。従って，例えば q ≳ 2 の場合を考えると，従来の２値論理の場合と同程度の複雑さで種々の議論を行え，又，同程度の費用で多値（p 値）論理回路が構成され得る，という期待がもたれる。

今後，計算機の種々の論理回路構成に対して，（p，q）論理が具体的にどのように役立つのか，又，値 p を任意に固定したとき，最適な s，q の値はどのような値であるのか，といったことを検討することが急務である。又，理論的には，集合 F に対する条件を緩めた場合の，完全性の条件を求めることが興味あ

る問題として残されている。

（謝辞）日頃御指導いただく，中京大学福村晃夫教授に感謝する。又，種々の検討をしていただく，多値論理研究会の皆さんに感謝する。

参考文献

1) Haga T. and Fukumura T.: The p-Valued-Input, q-Valued-Output Threshold Logic and the (p, q)-Polypheck-Like Function, INFORMATION SCIENCES 40, 227-246, 1986
2) Haga T. and Fukumura T.: The p-Valued-Input, q-Valued-Output Threshold Logic and its Application to the Synthesis of p-Valued Logical Networks, INFORMATION SCIENCES 32, 123-138, 1984
3) Haga T. and Fukumura T.: (p, q)-Logical Completeness for Output-Coherent Sets of (p, q)-Logical Functions and an Application of the Set to Image Processing, INFORMATION SCIENCES 40, 207-226, 1986
4) 羽賀，福村：p 値入力 q 値出力しきい値論理とその多値論理への応用，電子通信学会，オートマトン・言語研資，AL72-85，1972
5) 羽賀：しきい値論理関数に関する研究，学位論文（名古屋大学），1974

（付録１）定理１の証明

必要性：

条件(1)の必要性：F が s-(p, q) 論理完全であれば，任意の q 値論理関数 g に対して，

$$g(x_1, \cdots, x_n) = f(\varphi_{J_1^{(s)}}(x_1), \cdots, \varphi_{J_n^{(s)}}(x_n)) \tag{15}$$

である f が［F］に属する（for any specified $J_i^{(s)}$；i＝１，…，n)。従って，その f を実現する回路において入力 x_i を $J_i^{(s)}$（for each i＝１，…，n）と制限すれば，F*中の素子からなる g を実現する q 値論理回路となる。

条件(2)の必要性：（j_1，j_2）縮退性が，回路合成で保存されることに注意すればよい。

十分性：

［補題１］$f \in [F]$，かつ，$OUT(f) \subseteq J^{(s)}$（for some $J^{(s)}$）ならば，任意の $J^{(s)\prime}$ について［F］中に $OUT(f') \subseteq J^{(s)\prime}$ なる f′がすべて存在する。しかも，f′は，f の s＋１以上の出力 $s+1 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq p$ を各々 $s+1 \leqq i_1' \leqq \cdots \leqq i_r' \leqq p$ に置き換えて得られる。

この補題１は，F の p-s 閉性から明らかであるが，$OUT(f) \subseteq \{1, \cdots, s\}$，すなわち，r＝０ならば，補題１は無意味（空なる真）となることに注意する。又，$s+1 \leqq i_1' < \cdots < i_r' \leqq p$ への置き換えにより得られる任意の f′に対し，f′～f と表わすことにする。

さて，F*の q 値論理完全性より，任意の $j \in Q$ に対して q 値論理定数関数 $I_j \equiv j$ が以下のように得られる：

$$I_j = \varphi_{J^{(s)}}^{-1}(f(\varphi_{J_1^{(s)}}(x_1), \cdots, \varphi_{J_n^{(s)}}(x_n))) \tag{16}$$

（for some $J^{(S)}, J_1^{(S)}, \cdots, J_n^{(S)}$；$OUT(f) \subseteq J^{(S)}$, $f \in [F]$；$x_1, \cdots, x_n \in Q$)。$\varphi_{J^{(s)}}$, $\varphi_{J^{(s)}}^{-1}$ は $\{1, \cdots, s\}$ 上においては恒等写像であるから，各(p, q)論理定数関数 $I_1 \equiv 1$, …，$I_S \equiv s$ が $f(f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, f_n(\boldsymbol{x}))$ として得られる。但し，$OUT(f) \subseteq J^{(S)}$，$OUT(f_1) \subseteq J_1^{(S)}, \cdots, OUT(f_n) \subseteq J_n^{(S)}$，$\boldsymbol{x} \in L^n$。又，$f_1, \cdots, f_n \in [F]$ の存在性は補題1からいえる。次に，$s \lneqq q$ であるから，同様にして少くとも１つの(p, q)論理定数関数 $I_i \equiv i$（for some $s+1 \leqq i \leqq p$）が得られる。そして，F の p－s 閉性に注意すれば，(p, q)論理定数関数 $I_{s+1} \equiv s+1, \cdots, I_p \equiv p$ がすべて得られる。

次に，F*の q 値論理完全性，及び，補題１より，以下の f_1，…，f_6 及び $f_i' \sim f_i$ なる f_i' がすべて F から得られる（i＝1，…，６)。なお，これら f_i，f_i' は回路内部としてのみ用いられること，及び，各部分回路の fan—out は１とすることができる（必要に応じて複製する）ことに注意する。すなわち，fan—out が２以上の部分回路からの，次段の素子への種々の異なる入力制限要求 $J_i^{(s)}$ に矛盾なく対応できることに注意する。

①$\overline{x_1} = \varphi_{J^{(s)}}^{-1}(f_1(\varphi_{J_1^{(s)}}(x_1)))$ (17-1)

（for any $J^{(S)}$，for some $J_1^{(S)}$, $OUT(f_1) \subseteq J^{(S)}$)

②$x_1 \bullet \cdots \bullet x_m = \varphi_{J^{(s)}}^{-1}(f_2(\varphi_{J_1^{(s)}}(x_1), \cdots, \varphi_{J_m^{(s)}}(x_m)))$ (17-2)

（for any $J^{(S)}$, for some $J_1^{(S)}, \cdots, J_m^{(S)}$,
for each m，$OUT(f_2) \subseteq J^{(S)}$)

③$x_1 + \cdots + x_m = \varphi_{J^{(s)}}^{-1}(f_3(\varphi_{J_1^{(s)}}(x_1), \cdots, \varphi_{J_m^{(s)}}(x_m)))$ (17-3)

（for any $J^{(S)}$, for some $J_1^{(S)}, \cdots, J_m^{(S)}$,
for each m，$OUT(f_3) \subseteq J^{(S)}$)

④$\max(x_1, \cdots, x_m) = \varphi_{J^{(s)}}^{-1}(f_4(\varphi_{J_1^{(s)}}(x_1), \cdots, \varphi_{J_m^{(s)}}(x_m)))$ (17-4)

（for any $J^{(S)}$, for some $J_1^{(S)}, \cdots, J_m^{(S)}$,
for each m，$OUT(f_4) \subseteq J^{(S)}$)

⑤$(x_1)_{[1]}=\varphi^{-1}_{J^{(s)}}(f_5(\varphi_{J_1^{(s)}}(x_1)))$　(17-5)

(for any $J^{(S)}$, for some $J_1^{(S)}$, $OUT(f_5)\subseteq J^{(S)}$)

⑥$(x_1)_{[-1]}=\varphi^{-1}_{J^{(s)}}(f_6(\varphi_{J_1^{(s)}}(x_1)))$　(17-6)

(for any $J^{(S)}$, for some $J_1^{(S)}$, $OUT(f_6)\subseteq J^{(S)}$)

ここに, $\overline{x_1}=q-x_1+1$ はq値論理否定, max はq値論理MAXである。又, $x_1, \cdots, x_m\in Q$ に対して,

$$x_1\cdot\cdots\cdot x_m=\begin{cases} q & (x_1=\cdots=x_m=q)\\ 1 & (\text{その他})\end{cases} \quad (18\text{-}1)$$

$$x_1+\cdots+x_m=\begin{cases} 1 & (x_1=\cdots=x_m=1)\\ q & (\text{その他})\end{cases} \quad (18\text{-}2)$$

$$(x_1)_{[1]}=\begin{cases} x_1+1 & (x_1<q)\\ q & (x_1=q)\end{cases} \quad (18\text{-}3)$$

$$(x_1)_{[-1]}=\begin{cases} x_1-1 & (x_1>1)\\ 1 & (x_1=1)\end{cases} \quad (18\text{-}4)$$

である。これらの関数と, F の非縮退性より,

$$x^i=\begin{cases} q & (x=i)\\ 1 & (x=1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, p)\end{cases} \quad (19)$$

なる関数および$(x^i)'\sim x^i$なる関数がすべて得られる (for any $i=1, \cdots, p$) : まず, F の非縮退性より, 任意の $1\leqq j_1<j_2\leqq p$ に対し, (j_1, j_2) 非縮退の f が存在する。そして, F の p-s 閉性より $f'\sim f$ なる f' がすべて F 中に存在する。

$$f(k_1, \cdots, k_{i-1}, j_1, k_{i+1}, \cdots, k_p)$$
$$\neq f(k_1, \cdots, k_{i-1}, j_2, k_{i+1}, \cdots, k_p) \quad (20)$$

そこで,

$$\eta_{j_1, j_2}(x)=f(I_{k_1}, \cdots, I_{k_{i-1}}, x, I_{k_{i+1}}, \cdots, I_{k_p}) \quad (21)$$

と置く ($x\in L$)。一般性を失うことなく, $\eta_{j_1,j_2}(x=j_1)<\eta_{j_1,j_2}(x=j_2)$とする。さらに, OUT $(\eta_{j_1,j_2})\subseteq$ OUT$(f)\subseteq J_1^{(S)}$ (但し, $J_1^{(S)}$はf_5における入力制限) とできるから, f_5 $(\eta_{j_1,j_2}(x))$により$\eta_{j_1,j_2}(x=j_1)$, $\eta_{j_1,j_2}(x=j_2)$ の値が$J_1^{(S)}$中で各々1つ上の値となるようにできる。以下, 同様にして, $\eta_{j_1,j_2}(x=j_2)$の値が$J_1^{(S)}$中の最大値となるようにできる。次に, OUT$(\eta_{j_1,j_2}(x))\subseteq J_1^{(S)}$(但し, $J_1^{(S)}$はf_1における入力制限) とできるから, $\eta^\dagger_{j_1,j_2}(x=j_1)>\eta^\dagger_{j_1,j_2}(x=j_2)$なる$\eta^\dagger(x)$ を得る。さらに, 上記$\eta(x)$に対すると同様に, f_5を適当回使用して$\eta^\dagger_{j_1,j_2}(x=j_1)$の値が$J_1^{(S)}$中の最大値となるようにできる。これら$\eta(x)$, $\eta^\dagger(x)$に$\eta\sim\eta'$, $\eta^\dagger\sim(\eta^\dagger)'$なる$\eta'$, $(\eta^\dagger)'$がすべて得られるから, 以下により, x^i及び$(x^i)'\sim x^i$なる関数がすべて得られる。

$$x^i=f_2(\eta_{1,i}(x), \cdots, \eta_{i-1,i}(x), \eta^\dagger_{i,i+1}(x), \cdots,$$
$$\eta^\dagger_{i,p}(x)) \quad (22)$$

但し, OUT$(\eta_{1,i})=\{l_1, k_1\}$ (k_1は$J_1^{(s)}$中の最大値, l_1は$J_1^{(s)}$中の非最大値), …, OUT$(\eta^\dagger_{i,p})=\{l_{p-1}, k_{p-1}\}$ (k_{p-1}は$J_{p-1}^{(s)}$中の最大値, l_{p-1}は$J_{p-1}^{(s)}$中の非最大値) とできることに注意する。ここに, $J_1^{(s)}, \cdots, J_{p-1}^{(s)}$は$f_2$における各々の入力制限である。また, f_2の出力は任意の$J^{(s)}$の最小値, 最大値と選べる, 従って, OUT$(f_2)=\{1, q\}$ とできることに注意する。

以上により, OUT$(f(\boldsymbol{x}))=\{j_1, \cdots, j_r\}\subseteq J^{(s)}$ (for some $J^{(s)}$) なる (p, q) 論理関数$f(\boldsymbol{x})$が, 次のように構成される。但し, $1\leqq j_1<\cdots<j_r\leqq p$, $1\leqq r\leqq q$ とする。

$$\begin{cases} g_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})=f_2(x_1^{k_1}, \cdots, x_n^{k_n}) & (23\text{-}1)\\ \qquad (\boldsymbol{k}=(k_1, \cdots, k_n)) & \\ h_\ell(\boldsymbol{x})=f_3(g_{\boldsymbol{k}_1}(\boldsymbol{x}), \cdots, g_{\boldsymbol{k}_m}(\boldsymbol{x}) & (23\text{-}2)\\ \qquad (\{\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_m\}=\{\boldsymbol{x}\,|\,f(\boldsymbol{x})=\ell\}) & \\ f(\boldsymbol{x})=f_4(f_6^{\ell_1}(h_{j_1}(\boldsymbol{x})), \cdots, f_6^{\ell_r}(h_{j_r}(\boldsymbol{x}))) & (23\text{-}3)\\ \qquad (\boldsymbol{x}\in L^n) & \end{cases}$$

ここに,

(1) OUT$(x_i^{k_i})=\{i', i_q\}$ (i_qはf_2における入力制限$J_i^{(s)}$の最大値, i'は$J_i^{(s)}$中の非最大値) とできる ($i=1, \cdots, n$)。

(2) OUT$(g_{\boldsymbol{k}_i}(\boldsymbol{x}))=\{i_1, i'\}$ (i_1はf_3における入力制限$J_i^{(s)}$の最小値, i'は$J_i^{(s)}$中の非最小値) とできる ($i=1, \cdots, m$)。

(3) OUT$(h_{j_i}(\boldsymbol{x}))=\{i_1, i_q\}$ (i_1, i_qはf_6における入力制限$J_1^{(s)}$の各々最小値, 最大値)とできる ($i=1, \cdots, m$)。

(4) OUT$(f)\subseteq J^{(s)}$なる$J^{(s)}$において, $j_1, \cdots, j_r$が各々小さい方から$\nu_1, \cdots, \nu_r$番目であるとする ($1\leqq\nu_1<\cdots<\nu_r\leqq q$)。そのとき, OUT$(f_6^{\ell_i}(h_{j_i}(\boldsymbol{x})))=\{i_1, k_i\}$ (但し, k_iはf_4における入力制限$J_i^{(s)}$の小さい方からν_i番目の値, i_1は$J_i^{(s)}$中の最小値) とできる (for some ℓ_i ; $i=1, \cdots, r$)。

(注) $\nu_r=q$ ならば $\ell_r=0$ とする。そして, OUT$(h_{j_r}(\boldsymbol{x}))=\{i_1, i_q\}$ (i_qはf_4の r 番目の入力制限$J_r^{(s)}$の最大値, i_1は$J_r^{(s)}$中の最小値) とする。

(5) f_4の出力はOUT$(f)\subseteq J^{(s)}$なる上記の$J^{(s)}$中の$j_1, \cdots, j_r$にできる。

最後に, r=1 なら $f=I_i$ (for some $i\in L$)であり, すでに作られていること, 及び, n=1 and/or m=1なら, f_2, f_3を自然に解釈すること, に注意する。

(証了)

（付録２）sとFの論理的能力の一関係

p＝３，q＝２の場合に対し，パラメータsとFの論理的能力の一関係を述べる。

さて，２変数（３，２）論理しきい関数は，図３の４つの代表関数，及び，その同族関数のみである[4),5)]。

但し，変数の置換のみによる同族関数は，完全性について同値である，又，positiveな関数のみでは完全になり得ないことに注意する。

従って，変数の否定and/or関数の否定によって得られる関数（positiveな関数を除く）24個について，s＝０，１，２の各場合に対しs固定，３－s閉Fを構成し，定理１，又は，定理２の条件(1)，(2)を満たすFの個数を各々求めると，表１のごとくとなる（図４参照）。

この例からも，パラメータsの値とともに，Fの論理的能力がかなり変化すると予想される。

(1)

1	1	2
1	1	1
1	1	1

(2)

1	2	2
1	1	1
1	1	1

(3)

X2 ＼ X1	1	2	3
3	2	2	2
2	1	1	2
1	1	1	1

(4)

1	2	2
1	1	2
1	1	1

図３　２変数（３，２）論理しきい関数の代表

表１　定理１，又は，２の条件を満たすＦの個数

s	条件(1)を満たす	条件(2)を満たす(注)	条件(1)，(2)を共に満たす
0	24	18	18
1	13	18	10
2	4	18	2

（注）　縮退性はパラメータｓに無関係である。

（１－１）

3	2	1	1
2	1	1	1
1	1	1	1
	1	2	3

（１－２）

1	1	1
1	1	1
1	1	2

（１－３）（２，３）縮退

1	1	1
1	1	1
2	1	1

s	（１－１）	（１－２）	（１－３）
0	○	○	○
1	×	×	○
2	×	×	○

（1－4）（1，2）縮退

2	2	1
2	2	2
2	2	2

s	
0	○
1	○
2	×

（1－5）

1	2	2
2	2	2
2	2	2

s	
0	○
1	×
2	×

（1－6）

2	2	2
2	2	2
2	2	1

s	
0	○
1	×
2	×

（2－1）（1，2）縮退

2	2	1
1	1	1
1	1	1

s	
0	○
1	×
2	×

（2－2）（2，3）縮退

1	1	1
1	1	1
1	2	2

s	
0	○
1	×
2	○

（2－3）

1	1	1
1	1	1
2	2	1

s	
0	○
1	○
2	×

（2－4）

2	1	1
2	2	2
2	2	2

s	
0	○
1	○
2	×

（2－5）（1，2）縮退

1	1	2
2	2	2
2	2	2

s	
0	○
1	○
2	×

（2－6）（2，3）縮退

2	2	2
2	2	2
2	1	1

s	
0	○
1	×
2	×

（3－1）

2	2	2
2	1	1
1	1	1

s	
0	○
1	×
2	×

（3－2）

1	1	1
1	1	2
2	2	2

s	
0	○
1	○
2	×

（3－3）

1	1	1
2	1	1
2	2	2

s	
0	○
1	○
2	○

（3－4）

1	1	1
2	2	1
2	2	2

s	
0	○
1	○
2	×

（3－5）

1	1	1
1	2	2
2	2	2

s	
0	○
1	○
2	×

（3－6）

2	2	2
2	2	1
1	1	1

s	
0	○
1	×
2	×

（4－1）

2	2	1
2	1	1
1	1	1

（4－2）

1	1	1
1	1	2
1	2	2

（4－3）

1	1	1
2	1	1
2	2	1

s	（4－1）	（4－2）	（4－3）
0	○	○	○
1	×	×	○
2	×	×	○

（4－4）

2	1	1
2	2	1
2	2	2

（4－5）

1	1	2
1	2	2
2	2	2

（4－6）

2	2	2
2	2	1
2	1	1

s	（4－4）	（4－5）	（4－6）
0	○	○	○
1	○	○	○
2	×	×	×

図４　表１の原資料

（注１）　○，×はF^*（$(\hat{F})^*$）の２値論理完全性，不完全性を各々示す。

（注２）　ｓ＝０のとき，I_1，I_2，$I_3 \in F$であることに注意する。

（注３）　ｓ＝２のとき，I_3が使用できるという前提があることに注意する。

（注４）　（２－５），（３－２），（３－４），（３－５），（４－５），（４－６）において，ｓ＝１のときＮＯＴが得られることに注意する。

受理　平成２年２月20日