愛知工業大学研究報告
第 27 号 B　平成 4 年

論 文



# Marsden と Taylor の Fourier 積分公式について

# On Fourier Integral Formula by Marsden and Taylor

秦野 和郎[*], 河瀬 聡[†]
Kazuo HATANO, Satoru KAWASE

**Abstract** Marsden and Taylor derived a quadrature formula for a Fourier integral whose form is the correction of Discrete Fourier Coefficients by the difference of higher order derivatives of $f(x)$ at the end points. Polynomial splines are used so that the coefficients in this formula are chosen to make the error vanish if $f(x)$ is a spline of degree $k$. This formula is a good one, but the coefficients required in a actual computation are not yet given in a convenient form. To prevent the numerical instability in this formula, we derived another form of coefficients in this article. Numerical examples show the usefullness of this formula.

## 1. はじめに

等間隔離散点上で関数値が与えられているときに Fourier 積分を数値的に計算する方法として Marsden と Taylor の Fourier 積分公式 1) がある。この公式は被積分関数を $k$ 次のスプライン関数で近似し，得られた関数を Fourier 積分することにより得られるものである。

この公式の計算にはいくつかの係数を必要とするが，文献 1) にはその係数の計算式が実際の計算に適した形で与えられていない。そこで本論文では Marsden と Taylor の公式を使って Fourier 積分を計算するときに必要となる諸係数の計算式を実際の計算に適した形で示す。また，Marsden と Taylor の公式の有用性を簡単な関数の Fourier 係数を計算する事により確認する。

本論文では，第 2.章において Marsden と Taylor の公式について説明する。次の第 3.章において，この公式を使って Fourier 積分を計算するときに必要となる係数 $A(u,k)$, $B(u,k)$, $C_\nu(u,k)$ の計算式を与える。

また，この方法では Fourier 積分の区間の両端における高次微係数の差が必要とするが、この値の正確な値が与えられていない場合には，与えられている関数の等間隔離散点上での値から高次微係数を近似した値を Marsden と Taylor の公式に導入した方が実用的である。そこで，第 4.章では積分区間の両端における高次微係数の値を近似する方法の一つとして，数値微分公式のひとつである Markoff の公式を使って積分区間の両端における高次微係数の差の近似値を計算する方法を説明する。

第 5.章では，Marsden と Taylor の積和公式によってどの程度の誤差で Fourier 積分を近似する事が出来るのかを見るために，簡単な関数の Fourier 係数の計算を行い，その結果を示した。

## 2. Marsden と Taylor の Fourier 積分公式

Marsden と Taylor が導いた Fourier 積分の公式は被積分関数を $k$ 次のスプライン関数で近似した関数を Fourier 積分することにより得られるものである。

次に Marsden と Taylor の Fourier 積分公式を示す。

Marsden と Taylor は，スプラインの次数 $k = 0, 1, 2, \ldots$ について

$$(1)\quad \int_a^b f(x)e^{ijx}dx = hA\left[B\left(\frac{1}{2}f_0e^{ija} + \sum_{r=1}^{N-1} f_r e^{ij\bar{x}_r} + \frac{1}{2}f_N e^{ijb}\right)\right.$$

$$(2)\quad \left. -i\sum_{\nu=0}^{k} i^\nu h^\nu C_\nu \left(f_N^{(\nu)}e^{ijb} - f_0^{(\nu)}e^{ija}\right)\right] + Rf$$

の形の近似公式を導いている。ここで，

$$(3)\quad h=(b-a)/N\ ,\quad \bar{x}_r = a+rh\ ,\quad f_r^{(\nu)} = f^{(\nu)}(\bar{x}_r)$$

---

[*]愛知工業大学　電子工学科
[†]同大学院生

であり, $A = A(u,k)$, $B = B(u,k)$ , $C_\nu = C_\nu(u,k)$ は実数値を持つ関数である。これらの関数は $f(x)$ が $k$ 次のスプライン関数のとき剰余 $Rf$ を $Rf=0$ となるように決められている。スプラインの節点は,$k$ が奇数の時には関数値が与えられている点$\bar{x}_r$ と一致し, 偶数の時には $\bar{x}_r$ の各点のちょうど中点$\bar{x}_r+h/2$ に持つようにする。

Marsden と Taylor によると, $A(u,k)$ , $B(u,k)$ , $C_\nu(u,k)$ は次に示す式で与えられる実数関数である。すなわち, $u=jh$ とすると,

$$
(4)\quad \begin{cases} A(u,-1) = 1\ , \\ A(u,k) = 1/\Phi_{k+1}\ , \\ B(u,-1) = 1\ , \\ B(u,k) = \Psi^{k+1}(u)\ , \\ C_\nu(u,k) = [\Phi_{k+1} - \Psi^{k-\nu}(u)\rho_{\nu+1}]/u^{\nu+1} \end{cases}
$$

である。ここで, $\Psi(u), \Phi_k(u), \rho_{k+1}(u)$ は,

$$
(5)\quad \Psi(u) = \left(\frac{2}{u}\right)\sin\left(\frac{u}{2}\right),
$$

$$
(6)\quad \Phi_{k+1} = \begin{cases} \sigma_{k+1}\ , & k+1 \quad \text{odd}, \\ \rho_{k+1}\ , & k+1 \quad \text{even} \end{cases}
$$

であり, $\rho_{k+1}, \sigma_{k+1}$ は次式の漸化式で得られる。

$$
(7)\quad \begin{gathered} \rho_1 = \cos\left(\frac{u}{2}\right)\ , \\ \rho_{k+1} = \cos\left(\frac{u}{2}\right)\rho_k - \left(\frac{2}{k}\right)\sin\left(\frac{u}{2}\right)\rho_k' \quad (k>0), \end{gathered}
$$

$$
(8)\quad \begin{gathered} \sigma_1 = 1\ , \\ \sigma_{k+1} = \cos\left(\frac{u}{2}\right)\sigma_k - \left(\frac{2}{k}\right)\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sigma_k' \quad (k>0). \end{gathered}
$$

これらを使うと $B(u,k)$ は,

$$
(9)\quad B(u,k) = \Psi^{k+1}(u) = \left(\frac{2}{u}\right)^k \sin^k\left(\frac{u}{2}\right)
$$

より, 直ちに求めることが出来る。

$A(u,k), C_\nu(u,k)$ については, $k=0$ を出発点として漸化式 (4), (6), (7), (8) を用いて求めなければならない。

次に $k=0,1,2,\ldots,7$ について得た結果をテーブルの形で示す。

## 3. $A(u,k)$, $B(u,k)$, $C_\nu(u,k)$ の計算式

- $\rho_{k+1}$ のテーブル

$$
\begin{aligned}
\rho_1(u) &= \cos(\frac{u}{2}), \\
\rho_2(u) &= 1, \\
\rho_3(u) &= \cos(\frac{u}{2}), \\
\rho_4(u) &= \{1+2\cos^2(\frac{u}{2})\}/3 \\
&= (2+\cos u)/3, \\
\rho_5(u) &= \{2\cos(\frac{u}{2})+\cos^3(\frac{u}{2})\}/3 \\
&= \cos(\frac{u}{2})(5+\cos u)/6, \\
\rho_6(u) &= \{2+11\cos^2(\frac{u}{2})+2\cos^4(\frac{u}{2})\}/15 \\
&= (16+13\cos u+\cos^2 u)/30, \\
\rho_7(u) &= \{17\cos(\frac{u}{2})+26\cos^3(\frac{u}{2}) \\
&\quad +2\cos^5(\frac{u}{2})\}/45, \\
&= \cos(\frac{u}{2})(61+28\cos u+\cos^2 u)/90, \\
\rho_8(u) &= \{17+180\cos^2(\frac{u}{2})+114\cos^4(\frac{u}{2}) \\
&\quad +4\cos^6(\frac{u}{2})\}/315, \\
&= (272+297\cos u+60\cos^2 u \\
&\quad +\cos^3 u)/630, \\
\rho_9(u) &= \{62\cos(\frac{u}{2})+192\cos^3(\frac{u}{2}) \\
&\quad +60\cos^5(\frac{u}{2})+\cos^7(\frac{u}{2})\}/315, \\
&= \cos(\frac{u}{2})(1385+1011\cos u \\
&\quad +123\cos^2 u+\cos^3 u)/2520, \\
\rho_{10}(u) &= \{62+1072\cos^2(\frac{u}{2})+1452\cos^4(\frac{u}{2}) \\
&\quad +247\cos^6(\frac{u}{2})+2\cos^8(\frac{u}{2})\}/2835, \\
&= (7936+10841\cos u+3651\cos^2 u \\
&\quad +251\cos^3 u+\cos^4 u)/22680, \\
\rho_{11}(u) &= \{1382\cos(\frac{u}{2})+7192\cos^3(\frac{u}{2}) \\
&\quad +5097\cos^5(\frac{u}{2})+502\cos^7(\frac{u}{2}) \\
&\quad +2\cos^9(\frac{u}{2})\}/14175, \\
&= \cos(\frac{u}{2})(50521+50666\cos u \\
&\quad +11706\cos^2 u+506\cos^3 u \\
&\quad +\cos^4 u)/113400, \\
\rho_{12}(u) &= \{1382+35396\cos^2(\frac{u}{2}) \\
&\quad +83021\cos^4(\frac{u}{2})+34096\cos^6(\frac{u}{2}) \\
&\quad +2026\cos^8(\frac{u}{2})+4\cos^{10}(\frac{u}{2})\} \\
&\quad /155925, \\
&= (353792+580013\cos u \\
&\quad +274418\cos^2 u+38158\cos^3 u \\
&\quad +1018\cos^4 u+\cos^5 u)
\end{aligned}
$$

$$/1247400,$$

$$\begin{aligned}\rho_{13}(u) &= \{21844\cos(\frac{u}{2}) + 171511\cos^3(\frac{u}{2}) \\ &\quad + 217186\cos^5(\frac{u}{2}) + 55196\cos^7(\frac{u}{2}) \\ &\quad + 2036\cos^9(\frac{u}{2}) + 2\cos^{11}(\frac{u}{2})\} \\ &\quad /467775, \\ &= \cos(\frac{u}{2})(2702765 \\ &\quad + 3448901\cos u + 1212146\cos^2 u \\ &\quad + 118546\cos^3 u + 2041\cos^4 u \\ &\quad + \cos^5 u)/7484400,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_{14}(u) &= \{21844 + 776661\cos^2(\frac{u}{2}) \\ &\quad + 2801040\cos^4(\frac{u}{2}) \\ &\quad + 2123860\cos^6(\frac{u}{2}) \\ &\quad + 349500\cos^8(\frac{u}{2}) + 8166\cos^{10}(\frac{u}{2}) \\ &\quad + 4\cos^{12}(\frac{u}{2})\}/6081075, \\ &= (22368256 + 42783189\cos u \\ &\quad + 26085165\cos^2 u \\ &\quad + 5686570\cos^3 u \\ &\quad + 369930\cos^4 u + 4089\cos^5 u \\ &\quad + \cos^6 u)/97297200.\end{aligned}$$

- $\sigma_{k+1}$ のテーブル

$$\begin{aligned}\sigma_1(u) &= 1, \\ \sigma_2(u) &= \cos(\frac{u}{2}), \\ \sigma_3(u) &= \{1 + \cos^2(\frac{u}{2})\}/2 \\ &= (3 + \cos u)/4, \\ \sigma_4(u) &= \{5\cos(\frac{u}{2}) + \cos^3(\frac{u}{2})\}/6, \\ \sigma_5(u) &= \{5 + 18\cos^2(\frac{u}{2}) + \cos^4(\frac{u}{2})\}/24 \\ &= (57 + 38\cos u + \cos^2 u)/96,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_6(u) &= \{61\cos(\frac{u}{2}) + 58\cos^3(\frac{u}{2}) \\ &\quad + \cos^5(\frac{u}{2})\}/120, \\ \sigma_7(u) &= \{61 + 479\cos^2(\frac{u}{2}) + 179\cos^4(\frac{u}{2}) \\ &\quad + \cos^6(\frac{u}{2})\}/720, \\ &= (2763 + 2635\cos u + 361\cos^2 u \\ &\quad + \cos^3 u)/5760, \\ \sigma_8(u) &= \{1385\cos(\frac{u}{2}) + 3111\cos^3(\frac{u}{2}) \\ &\quad + 543\cos^5(\frac{u}{2}) + \cos^7(\frac{u}{2})\}/5040,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_9(u) &= \{1385 + 19028\cos^2(\frac{u}{2}) \\ &\quad + 18270\cos^4(\frac{u}{2}) + 1636\cos^6(\frac{u}{2}) \\ &\quad + \cos^8(\frac{u}{2})\}/40320, \\ &= (250737 + 308204\cos u \\ &\quad + 82902\cos^2 u + 3276\cos^3 u \\ &\quad + \cos^4 u)/645120, \\ \sigma_{10}(u) &= \{50521\cos(\frac{u}{2}) + 206276\cos^3(\frac{u}{2}) \\ &\quad + 101166\cos^5(\frac{u}{2}) + 4916\cos^7(\frac{u}{2}) \\ &\quad + \cos^9(\frac{u}{2})\}/362880,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{11}(u) &= \{50521 + 1073517\cos^2(\frac{u}{2}) \\ &\quad + 1949762\cos^4(\frac{u}{2}) \\ &\quad + 540242\cos^6(\frac{u}{2}) + 14757\cos^8(\frac{u}{2}) \\ &\quad + \cos^{10}(\frac{u}{2})\}/3628800, \\ &= (36581523 + 54973429\cos u \\ &\quad + 22258094\cos^2 u \\ &\quad + 2279034\cos^3 u + 29519\cos^4 u \\ &\quad + \cos^5 u)/116121600, \\ \sigma_{12}(u) &= \{2702765\cos(\frac{u}{2}) \\ &\quad + 17460701\cos^3(\frac{u}{2}) \\ &\quad + 16889786\cos^5(\frac{u}{2}) \\ &\quad + 2819266\cos^7(\frac{u}{2}) \\ &\quad + 44281\cos^9(\frac{u}{2}) + \cos^{11}(\frac{u}{2})\} \\ &\quad /39916800, \\ \sigma_{13}(u) &= \{2702765 + 82112518\cos^2(\frac{u}{2}) \\ &\quad + 241595239\cos^4(\frac{u}{2}) \\ &\quad + 137963364\cos^6(\frac{u}{2}) \\ &\quad + 14494859\cos^8(\frac{u}{2}) \\ &\quad + 132854\cos^{10}(\frac{u}{2}) \\ &\quad + \cos^{12}(\frac{u}{2})\}/479001600, \\ &= (7828053417 + 13903015250\cos u \\ &\quad + 7527178271\cos^2 u \\ &\quad + 1338281756\cos^3 u \\ &\quad + 59307991\cos^4 u + 265714\cos^5 u \\ &\quad + \cos^6 u)/30656102400.\end{aligned}$$

- $A(u,k)$ のテーブル

$$
\begin{aligned}
A(u,-1) &= 1,\\
A(u,0) &= 1,\\
A(u,1) &= 1,\\
A(u,2) &= 4/(3+\cos u),\\
A(u,3) &= 3/(2+\cos u),\\
A(u,4) &= 192/\{115+76\cos u+\cos(2u)\},\\
A(u,5) &= 60/\{33+26\cos u+\cos(2u)\},\\
A(u,6) &= 23040/\{11774+10543\cos u\\
&\quad +722\cos(2u)+\cos(3u)\},\\
A(u,7) &= 2520/(1208+1191\cos u\\
&\quad +120\cos(2u)+\cos(3u)\}.
\end{aligned}
$$

$u$ が適当な値よりも大きいときには, $C_\nu(u,k)$ の計算には次のテーブルを使う。

- $C_\nu(u,k)$ のテーブル (その 1)

$$C_0(u,0)=[1-\cos(\frac{u}{2})]/u,$$

$$C_0(u,1)=[u-\sin u]/u^2,$$
$$C_1(u,1)=0,$$

$$C_0(u,2)=[u^2(3+\cos u)-4\cos(\frac{u}{2})$$
$$+4\cos(\frac{3}{2}u)]/(4u^3),$$
$$C_1(u,2)=[u(3+\cos u)-8\sin(\frac{u}{2})]/(4u^3),$$
$$C_2(u,2)=[3+\cos u-4\cos(\frac{u}{2})]/(4u^3),$$

$$C_0(u,3)=[u^3(2+\cos u)$$
$$-6\sin u+3\sin(2u)]/(3u^4),$$
$$C_1(u,3)=[u^2(2+\cos u)$$
$$-6+6\cos u]/(3u^4),$$
$$C_2(u,3)=[u(2+\cos u)-3\sin u]/(3u^4),$$
$$C_3(u,3)=0,$$

$$C_0(u,4)=[\frac{u^4}{2}\{115+76\cos u+\cos(2u)\}$$
$$-192\cos(\frac{u}{2})+288\cos(\frac{3}{2}u)$$
$$-96\cos(\frac{5}{2}u)]/(96u^5),$$
$$C_1(u,4)=[\frac{u^3}{2}\{115+76\cos u+\cos(2u)\}$$
$$-576\sin(\frac{u}{2})+192\sin(\frac{3}{2}u)]/(96u^5),$$
$$C_2(u,4)=[\frac{u^2}{2}\{115+76\cos u+\cos(2u)\}$$
$$-96\cos(\frac{u}{2})+96\cos(\frac{3}{2}u)]/(96u^5),$$
$$C_3(u,4)=[\frac{u}{2}\{115+76\cos u+\cos(2u)\}$$
$$-96\sin(\frac{u}{2})-32\sin(\frac{3}{2}u)]/(96u^5),$$
$$C_4(u,4)=[\frac{1}{2}\{115+76\cos u+\cos(2u)\}$$
$$-88\cos(\frac{u}{2})-8\cos(\frac{3}{2}u)]/(96u^5),$$

$$C_0(u,5)=[\frac{u^5}{2}\{33+26\cos u+\cos(2u)\}$$
$$-150\sin u+120\sin(2u)$$
$$-30\sin(3u)]/(30u^6),$$
$$C_1(u,5)=[\frac{u^4}{2}\{33+26\cos u+\cos(2u)\}$$
$$-180+240\cos u-60\cos(2u)]/(30u^6),$$
$$C_2(u,5)=[\frac{u^3}{2}\{33+26\cos u+\cos(2u)\}$$
$$-60\sin u+30\sin(2u)]/(30u^6),$$
$$C_3(u,5)=[\frac{u^2}{2}\{33+26\cos u+\cos(2u)\}$$
$$-30+20\cos u+10\cos(2u)]/(30u^6),$$
$$C_4(u,5)=[\frac{u}{2}\{33+26\cos u+\cos(2u)\}$$
$$-25\sin u-\frac{5}{2}\sin(2u)]/(30u^6),$$
$$C_5(u,5)=0,$$

$$C_0(u,6)=[\frac{u^6}{4}\{11774+10543\cos u$$
$$+722\cos(2u)+\cos(3u)\}$$
$$-5760\{5\cos(\frac{u}{2})-9\cos(\frac{3}{2}u)$$
$$+5\cos(\frac{5}{2}u)-\cos(\frac{7}{2}u)\}]/(5760u^7),$$
$$C_1(u,6)=[\frac{u^5}{4}\{11774+10543\cos u$$
$$+722\cos(2u)+\cos(3u)\}$$
$$-11520\{10\sin(\frac{u}{2})-5\sin(\frac{3}{2}u)$$
$$+\sin(\frac{5}{2}u)\}]/(5760u^7),$$
$$C_2(u,6)=[\frac{u^4}{4}\{11774+10543\cos u$$
$$+722\cos(2u)+\cos(3u)\}$$
$$-5760\{2\cos(\frac{u}{2})-3\cos(\frac{3}{2}u)$$
$$+\cos(\frac{5}{2}u)\}]/(5760u^7),$$
$$C_3(u,6)=[\frac{u^3}{4}\{11774+10543\cos u$$
$$+722\cos(2u)+\cos(3u)\}$$
$$-1920\{8\sin(\frac{u}{2})-\sin(\frac{3}{2}u)$$

$$- \sin(\frac{5}{2}u)\}]/(5760u^7),$$

$$C_4(u,6) = [\frac{u^2}{4}\{11774 + 10543\cos u + 722\cos(2u) + \cos(3u)\} - 480\{10\cos(\frac{u}{2}) - 9\cos(\frac{3}{2}u) - \cos(\frac{5}{2}u)\}]/(5760u^7),$$

$$C_5(u,6) = [\frac{u}{4}\{11774 + 10543\cos u + 722\cos(2u) + \cos(3u)\} - 96\{40\sin(\frac{u}{2}) + 25\sin(\frac{3}{2}u) + \sin(\frac{5}{2}u)\}]/(5760u^7),$$

$$C_6(u,6) = [\frac{1}{4}\{11774 + 10543\cos u + 722\cos(2u) + \cos(3u)\} - 16\{302\cos(\frac{u}{2}) + 57\cos(\frac{3}{2}u) + \cos(\frac{5}{2}u)\}]/(5760u^7),$$

$$C_0(u,7) = [\frac{u^7}{4}\{1208 + 1191\cos u + 120\cos(2u) + \cos(3u)\} - 630\{14\sin u - 14\sin(2u) + 6\sin(3u) - \sin(4u)\}]/(630u^8),$$

$$C_1(u,7) = [\frac{u^6}{4}\{1208 + 1191\cos u + 120\cos(2u) + \cos(3u)\} - 1260\{10 - 15\cos u + 6\cos(2u) - \cos(3u)\}]/(630u^8),$$

$$C_2(u,7) = [\frac{u^5}{4}\{1208 + 1191\cos u + 120\cos(2u) + \cos(3u)\} - 630\{5\sin u - 4\sin(2u) + \sin(3u)\}]/(630u^8),$$

$$C_3(u,7) = [\frac{u^4}{4}\{1208 + 1191\cos u + 120\cos(2u) + \cos(3u)\} - 210\{8 - 9\cos u + \cos(3u)\}]/(630u^8),$$

$$C_4(u,7) = [\frac{u^3}{4}\{1208 + 1191\cos u + 120\cos(2u) + \cos(3u)\} - \frac{105}{2}\{19\sin u - 8\sin(2u) - \sin(3u)\}]/(630u^8),$$

$$C_5(u,7) = [\frac{u^2}{4}\{1208 + 1191\cos u + 120\cos(2u) + \cos(3u)\} - \frac{21}{2}\{40 - 15\cos u - 24\cos(2u) - \cos(3u)\}]/(630u^8),$$

$$C_6(u,7) = [\frac{u}{4}\{1208 + 1191\cos u + 120\cos(2u) + \cos(3u)\} - \frac{7}{4}\{245\sin u + 56\sin(2u) + \sin(3u)\}]/(630u^8),$$

$$C_7(u,7) = 0.$$

テーブル (その 1) で与えられる式を使うと $u$ が小さいとき $C_\nu(u,k)$ は数値的に不安定となるので，$u$ が小さいときには $C_\nu(u,k)$ の Maclaurin 展開し，適当な項で打ち切って使うとよい結果が得られる。以下に $C_\nu(u,k)$ の Maclaurin 展開式を与える。

ここで, 表記の簡単のために

$$(10)\ T_n(x) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i+n)!}$$

を定義する。これにより, テーブル (その 1) を次のように書き換えることが出来る。

- $C_\nu(u,k)$ のテーブル (その 2)

$$C_0(u,0) = \frac{u}{4}T_2(\frac{u}{2}),$$

$$C_0(u,1) = uT_1(u),$$
$$C_1(u,1) = 0,$$

$$C_0(u,2) = u\{-\frac{1}{4}T_2(u) - \frac{1}{16}T_4(\frac{u}{2}) + \frac{81}{16}T_4(\frac{3}{2}u)\},$$
$$C_1(u,2) = -\frac{1}{4}T_2(u) + \frac{1}{4}T_3(\frac{u}{2}),$$
$$C_2(u,2) = u\{\frac{1}{4}T_4(u) - \frac{1}{16}T_4(\frac{u}{2})\},$$

$$C_0(u,3) = u\{-\frac{1}{3}T_2(u) - 2T_5(u) + 32T_5(2u)\},$$
$$C_1(u,3) = -\frac{1}{3}T_2(u) + 2T_4(u),$$
$$C_2(u,3) = u\{\frac{1}{3}T_4(u) - T_5(u)\},$$
$$C_3(u,3) = 0,$$

$$C_0(u,4) = u\{-\frac{19}{48}T_2(u) - \frac{1}{48}T_2(2u) + \frac{1}{32}T_6(\frac{u}{2}) - \frac{2187}{64}T_6(\frac{3}{2}u) + \frac{15625}{64}T_6(\frac{5}{2}u)\},$$
$$C_1(u,4) = -\frac{19}{48}T_2(u) - \frac{1}{48}T_2(2u) - \frac{3}{16}T_5(\frac{u}{2}) + \frac{243}{16}T_5(\frac{3}{2}u),$$
$$C_2(u,4) = u\{\frac{19}{48}T_4(u) + \frac{1}{12}T_4(2u)$$

$$+\frac{1}{64}T_6(\frac{u}{2})-\frac{729}{64}T_6(\frac{3}{2}u)\},$$

$$C_3(u,4)=\frac{19}{48}T_4(u)+\frac{1}{12}T_4(2u)$$
$$-\frac{1}{32}T_5(\frac{u}{2})-\frac{81}{32}T_5(\frac{3}{2}u),$$

$$C_4(u,4)=u\{-\frac{19}{48}T_6(u)-\frac{1}{3}T_6(2u)$$
$$+\frac{11}{768}T_6(\frac{u}{2})+\frac{243}{256}T_6(\frac{3}{2}u)\},$$

$$C_0(u,5)=u\{-\frac{13}{30}T_2(u)-\frac{1}{15}T_2(2u)+5T_7(u)$$
$$-512T_7(2u)+2187T_7(3u)\},$$

$$C_1(u,5)=-\frac{13}{30}T_2(u)-\frac{1}{15}T_2(2u)$$
$$-8T_6(u)+128T_6(2u),$$

$$C_2(u,5)=u\{\frac{13}{30}T_4(u)+\frac{4}{15}T_4(2u)$$
$$+2T_7(u)-128T_7(2u)\},$$

$$C_3(u,5)=\frac{13}{30}T_4(u)+\frac{4}{15}T_4(2u)$$
$$-\frac{2}{3}T_6(u)-\frac{64}{3}T_6(2u),$$

$$C_4(u,5)=u\{-\frac{13}{30}T_6(u)-\frac{16}{15}T_6(2u)$$
$$+\frac{5}{6}T_7(u)+\frac{32}{3}T_7(2u)\},$$

$$C_5(u,5)=0,$$

$$C_0(u,6)=u\{-\frac{10543}{23040}T_2(u)-\frac{361}{2880}T_2(2u)$$
$$-\frac{1}{2560}T_2(3u)-\frac{5}{256}T_8(\frac{u}{2})$$
$$+\frac{59049}{256}T_8(\frac{3}{2}u)-\frac{1953125}{256}T_8(\frac{5}{2}u)$$
$$+\frac{5764801}{256}T_8(\frac{7}{2}u)\},$$

$$C_1(u,6)=-\frac{10543}{23040}T_2(u)-\frac{361}{2880}T_2(2u)$$
$$-\frac{1}{2560}T_2(3u)+\frac{5}{32}T_7(\frac{u}{2})$$
$$-\frac{10935}{64}T_7(\frac{3}{2}u)+\frac{78125}{64}T_7(\frac{5}{2}u),$$

$$C_2(u,6)=u\{\frac{10543}{23040}T_4(u)+\frac{361}{720}T_4(2u)$$
$$+\frac{9}{2560}T_4(3u)-\frac{1}{128}T_8(\frac{u}{2})$$
$$+\frac{19683}{256}T_8(\frac{3}{2}u)-\frac{390625}{256}T_8(\frac{5}{2}u)\},$$

$$C_3(u,6)=\frac{10543}{23040}T_4(u)+\frac{361}{720}T_4(2u)$$
$$+\frac{9}{2560}T_4(3u)+\frac{1}{48}T_7(\frac{u}{2})$$
$$-\frac{729}{128}T_7(\frac{3}{2}u)-\frac{78125}{384}T_7(\frac{5}{2}u),$$

$$C_4(u,6)=u\{-\frac{10543}{23040}T_6(u)-\frac{361}{180}T_6(2u)$$
$$-\frac{81}{2560}T_6(3u)-\frac{5}{1536}T_8(\frac{u}{2})$$
$$+\frac{19683}{1024}T_8(\frac{3}{2}u)+\frac{390625}{3072}T_8(\frac{5}{2}u)\},$$

$$C_5(u,6)=-\frac{10543}{23040}T_6(u)-\frac{361}{180}T_6(2u)$$
$$-\frac{81}{2560}T_6(3u)+\frac{1}{192}T_7(\frac{u}{2})$$
$$+\frac{3645}{512}T_7(\frac{3}{2}u)+\frac{15625}{1536}T_7(\frac{5}{2}u),$$

$$C_6(u,6)=u\{\frac{10543}{23040}T_8(u)+\frac{361}{45}T_8(2u)$$
$$+\frac{729}{2560}T_8(3u)-\frac{151}{46080}T_8(\frac{u}{2})$$
$$-\frac{124659}{30720}T_8(\frac{3}{2}u)-\frac{78125}{18432}T_8(\frac{5}{2}u)\},$$

$$C_0(u,7)=u\{-\frac{397}{840}T_2(u)-\frac{4}{21}T_2(2u)$$
$$-\frac{1}{280}T_2(3u)-14T_9(u)+7168T_9(2u)$$
$$-118098T_9(3u)+262144T_9(4u)\},$$

$$C_1(u,7)=-\frac{397}{840}T_2(u)-\frac{4}{21}T_2(2u)-\frac{1}{280}T_2(3u)$$
$$+30T_8(u)-3072T_8(2u)+13122T_8(3u),$$

$$C_2(u,7)=u\{\frac{397}{840}T_4(u)+\frac{16}{21}T_4(2u)$$
$$+\frac{9}{280}T_4(3u)-5T_9(u)$$
$$+2048T_9(2u)-19683T_9(3u)\},$$

$$C_3(u,7)=\frac{397}{840}T_4(u)+\frac{16}{21}T_4(2u)+\frac{9}{280}T_4(3u)$$
$$+3T_8(u)-2187T_8(3u),$$

$$C_4(u,7)=u\{-\frac{397}{840}T_6(u)-\frac{64}{21}T_6(2u)$$
$$-\frac{81}{280}T_6(3u)-\frac{19}{12}T_9(u)$$
$$+\frac{1024}{3}T_9(2u)+\frac{6561}{4}T_9(3u)\},$$

$$C_5(u,7)=-\frac{397}{840}T_6(u)-\frac{64}{21}T_6(2u)-\frac{81}{280}T_6(3u)$$
$$+\frac{1}{4}T_8(u)+\frac{512}{5}T_8(2u)+\frac{2187}{20}T_8(3u),$$

$$C_6(u,7)=u\{\frac{397}{840}T_8(u)+\frac{256}{21}T_8(2u)$$
$$+\frac{729}{280}T_8(3u)-\frac{49}{72}T_9(u)$$
$$-\frac{3584}{45}T_9(2u)-\frac{2187}{40}T_9(3u)\},$$

$$C_7(u,7)=0.$$

## 4. Markoff の公式

等間隔離散点 $\bar{x}_i$ , すなわち

(11) $\bar{x}_i=\bar{x}_0+hi \quad : i=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$

において, 関数値 $f(\bar{x}_i)$ が与えられるとする。このとき Markoff の公式は, 適当な条件のもとに Newton 補間公式を必要な回数だけ微分することにより得ることが出来る。

$f(x)$ は $x = \bar{x}_0$ で不連続であるかも知れないが，左関数値 $f(\bar{x}_0-)$ および右関数値 $f(\bar{x}_0+)$ が与えられているとすると，左微係数および右微係数に対する Markoff の公式の差は

$$h^\nu f^{(\nu)}(x_0-) - h^\nu f^{(\nu)}(x_0+) = \sum_{i=\nu}^{m} \frac{\nu!}{i!} S_i^{(\nu)} \{(-1)^{i-\nu} \nabla^i f(x_0) - \Delta^i f(x_0)\} + h^{m+1} \int_{-m}^{m} f^{(m+1)}(x_0 + ht) G_m^{(\nu,0)}(0;t) dt \tag{12}$$

で与えられる。

式 (12) において右辺第二項は剰余項であり，これは $h^{m+1}$ に比例しているので $h$ と $m$ の取り方によって小さくできる項である。ここで式 (12) の剰余項において，$G_m^{(\nu,0)}(0;t)$ は

$$G_m^{(\nu,0)}(0;t) = \begin{cases} \underline{G}_m^{(\nu,0)}(0;t) & : t < 0, \\ -\bar{G}_m^{(\nu,0)}(0;t) & : t \geq 0 \end{cases} \quad : 1 \leq \nu \leq m \tag{13}$$

$$\bar{G}_m^{(\nu,0)}(0;t) = -\frac{\nu!}{m!} \sum_{i=\nu}^{m} S_i^{(\nu)} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \frac{(j-t)_+^m}{i!} \quad : 1 \leq \nu \leq m \tag{14}$$

$$\underline{G}_m^{(\nu,0)}(0;t) = (-1)^{m-\nu} \frac{\nu!}{m!} \sum_{i=\nu}^{m} S_i^{(\nu)} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \frac{(j+t)_+^m}{i!} \quad : 1 \leq \nu \leq m \tag{15}$$

である。また，

$$\binom{i}{j} = {}_iC_j = \frac{i!}{j!(i-j)!} \tag{16}$$

は二項係数であり，

$$\bar{g}_{m+1}(x;y) = (x-y)_+^m = \begin{cases} (x-y)^m & : x - y \geq 0, \\ 0 & : x - y < 0 \end{cases} \tag{17}$$

は打ち切りべき関数である。

$\Delta^k f(x), \nabla^k f(x)$ はそれぞれ, 前進差分, 後退差分であり, 次のように再帰的に定義される。

$$\begin{cases} \Delta^0 f(x) = f(x), \\ \Delta^k f(x) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x), \\ \nabla^0 f(x) = f(x), \\ \nabla^k f(x) = \nabla^{k-1} f(x) - \nabla^{k-1} f(x-h) \end{cases} \quad : k = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

$S_i^{(\nu)}$ は第一種の Stirling 数であり、次式で定義される (ここでは空積は 1 とする)。

$$s(s-1)\cdots(s-i+1) \equiv \sum_{\nu=0}^{i} S_i^{(\nu)} s^\nu \tag{19}$$

$S_i^{(\nu)}$ の値を計算すると,

- $i = 1$ の場合
  $S_1^{(0)} = 0,\ S_1^{(1)} = 1$
- $i = 2$ の場合
  $S_2^{(0)} = 0,\ S_2^{(1)} = -1,\ S_2^{(2)} = 1$
- $i = 3$ の場合
  $S_3^{(0)} = 0,\ S_3^{(1)} = 2,\ S_3^{(2)} = -3,\ S_3^{(3)} = 1$

となる。又,$S_i^{(\nu)}$ には次式のような関係がある。

$$\begin{cases} S_i^{(0)} = 0, \\ S_{i+1}^{(i+1)} = S_i^{(i)} = 1, \\ S_{i+1}^{(\nu)} = S_i^{(\nu-1)} - i S_i^{(\nu)} & : \nu = i, i-1, \ldots, 1 \end{cases} \tag{20}$$

$i$ が大きな場合にも式 (20) を計算することにより $S_i^{(\nu)}$ の値を求めることが出来る。

式 (12) の左微係数および右微係数に対する Markoff の公式の差を使い, $\bar{x}_0+$ , $\bar{x}_0-$ をそれぞれ $0+$ , $2\pi-$ とおき, 式 (12) における積分剰余項の絶対値が十分に小であると仮定すると $f^{(\nu)}(2\pi-) - f^{(\nu)}(0+)$ は次式で近似できる。

$$f^{(\nu)}(2\pi-) - f^{(\nu)}(0+) \approx \frac{1}{h^\nu} \sum_{i=\nu}^{m} \frac{\nu!}{i!} S_i^{(\nu)} \{(-1)^{i-\nu} \nabla^i f(2\pi-) - \Delta^i f(0+)\} \quad : \nu = 1, 2, \ldots, m \tag{21}$$

ここで

$$h = (2\pi)/N \tag{22}$$

であり，$\Delta^i f(0+) \quad : i = 1, 2, \ldots, m$ の値は,

$$f(0+),\ f(h),\ f(2h),\ \ldots\ ,\ f(mh)$$

から得られ, $\nabla^i f(2\pi-) \quad : i = 1, 2, \ldots, m$ の値は,

$$f(2\pi - mh),\ f(2\pi - mh + h),\ \ldots\ ,\ f(2\pi-)$$

から計算できる。

## 5. 数値例

ここでは Marsden と Taylor の Fourier 積分公式が，どの程度の誤差で Fourier 積分を近似できるかを見るために，いくつかの簡単な関数について Fourier 係数を Marsden と Taylor の Fourier 積分公式を使って計算した。以下にその結果を示す。

計算に用いた関数は次式に示す関数である。

(23) $f_1(x) = \exp(x - \pi);\ (0 \leq x \leq 2\pi)$

(24) $f_2(x) = x \cos 50x;\ (0 \leq x \leq 2\pi)$

ここで，$f_1(x)$ は穏やかな変化をする関数であり，$f_2(x)$ は激しく振動する関数である。

Fourier 係数を計算するための計算式を次の節 5.1 で説明する。

### 5.1 Fourier 係数の計算式

式 (1)

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)e^{ijx}dx \\ &= hA\Bigg[B\left(\frac{1}{2}f_0e^{ija} + \sum_{r=1}^{N-1} f_r e^{ij\bar{x}_r} + \frac{1}{2}f_N e^{ijb}\right) \\ &\quad - i\sum_{\nu=0}^{k} i^\nu h^\nu C_\nu \left(f_N^{(\nu)}e^{ijb} - f_0^{(\nu)}e^{ija}\right)\Bigg] \\ &\quad + Rf\end{aligned}$$

において $Rf$ は無視できるほど小であると仮定する。ここで，$a = 0, b = 2\pi$ とすると，Fourier 係数の近似値は

$$(25)\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{ijx}dx$$
$$\begin{aligned}&= \frac{2}{N}A\Bigg[B\left(\frac{1}{2}f(0+) + \sum_{r=1}^{N-1} f(x_r)e^{ijx_r}\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}f(2\pi-)\right) - i\sum_{\nu=0}^{k} i^\nu h^\nu C_\nu \left(f^{(\nu)}(2\pi-)\right. \\ &\quad \left. - f^{(\nu)}(0+)\right)\Bigg]\end{aligned}$$
$$j = 0, 1, 2, \ldots, N/2$$

(26) $h = \dfrac{2\pi}{N}, \quad \bar{x}_r = hr$

で与えられる。ここで実部が

(27) $a_j(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos jx dx$

の近似値になり，虚部が

(28) $b_j(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin jx dx$

の近似値になっている。

以降，式 (25) を使って得られた Fourier 係数の近似値を $\tilde{a}_j(f), \tilde{b}_j(f)$ と書き表す。

式 (25) をみると右辺第一項は離散 Fourier 係数を修正したものであり，第二項は補正項である。このことから，式 (25) の右辺の因子

$$\left(\frac{1}{2}f(0+) + \sum_{r=1}^{N-1} f(x_r)e^{ijx_r} + \frac{1}{2}f(2\pi-)\right)$$

は, FFT (高速 Fourier 変換) を使って高速に計算することが出来る。

この方法では $k$ 次以下の区間の両端における微係数の差を必要とするのが欠点となっている。従って，ここでは Markoff の公式を使って両端における高次の微係数を近似して得られる結果も示した。

また，$C_\nu(u, k)$ の値を考えると $m$ が整数のとき，$k$ が奇数 $k = 2m + 1$ である場合には, $C_{2m+1}(u) = 0$ であるから $k = 2m, 2m + 1$ のとき $2m$ 次以下の微係数の差が必要である。

### 5.2 計算結果

以上の手順を使って Fourier 積分を計算し得られた Fourier 係数の近似値の Fourier 係数の真値に対する誤差をグラフで示した。以下では計算した Fourier 係数の近似値を $\tilde{a}_j(f), \tilde{b}_j(f)$ とし，Fourier 係数の真値を $a_j(f), b_j(f)$ と書く。グラフは縦軸には計算した Fourier 係数の近似値 $\tilde{a}_j(f), \tilde{b}_j(f)$ の Fourier 係数の真値 $a_j(f), b_j(f)$ に対する絶対誤差 $|\tilde{a}_j(f) - a_j(f)|$, $|\tilde{b}_j(f) - b_j(f)|$ を示している。また，$k = -1$ のときの Fourier 係数の計算値は離散 Fourier 係数であり，これを $\bar{a}_j(f), \bar{b}_j(f)$ としている。グラフの横軸には $j$ を取っている。$j$ は $j = 1$ から $j = 2048$ までである。ここで，縦軸と横軸の目盛りは対数目盛りを用いている。

はじめに $f_1(x) = \exp(x - \pi)$ について Fourier 係数を計算した結果を示す。この関数は穏やかな変化をするので Marsden と Taylor の方法でうまくゆく例である。図 1 は $k = -1$，離散 Fourier 係数の Fourier 係数に対する誤差を示している。図を見ると $N = 1024$ の場合でも誤差の最大値は $10^{-2}$ よりも大きくなっている。次の図 2 は $k = 3$，すなわち区間の両端における 2 次以下の微係数の差を用いた場合である。この場合では，Fourier 係数の誤差は $10^{-11}$ 以下になっており，高精度の Fourier 係数が得られ

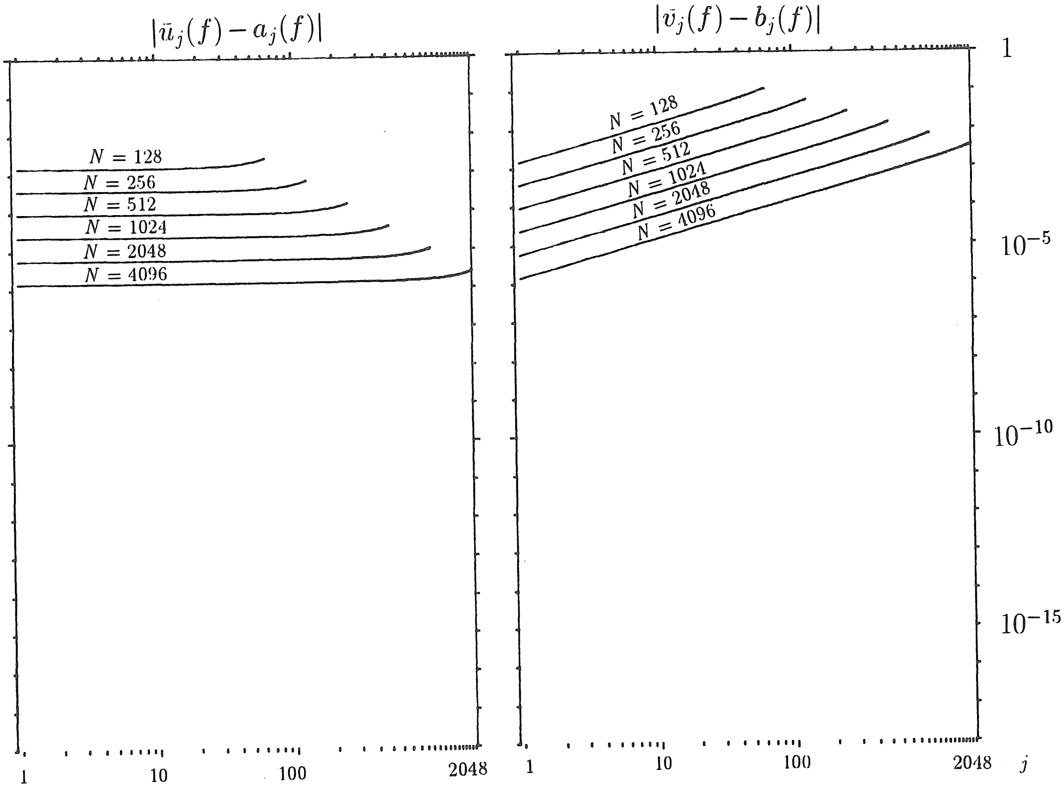


図. 1: $f_1(x)$ : $k = -1$ のときすなわち実 FFT によって計算される離散 Fourier 係数の Fourier 係数の誤差

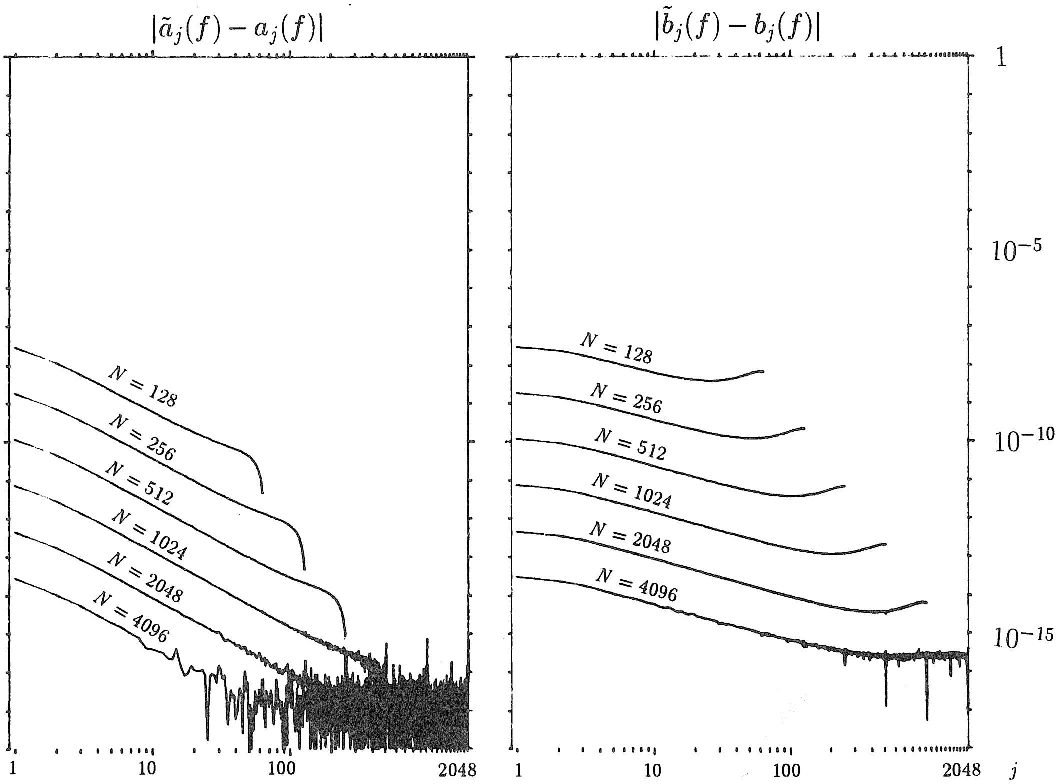


図. 2: $f_1(x)$ : $k = 3$ のとき微係数の差に正確な値を使った場合の Fourier 係数の誤差

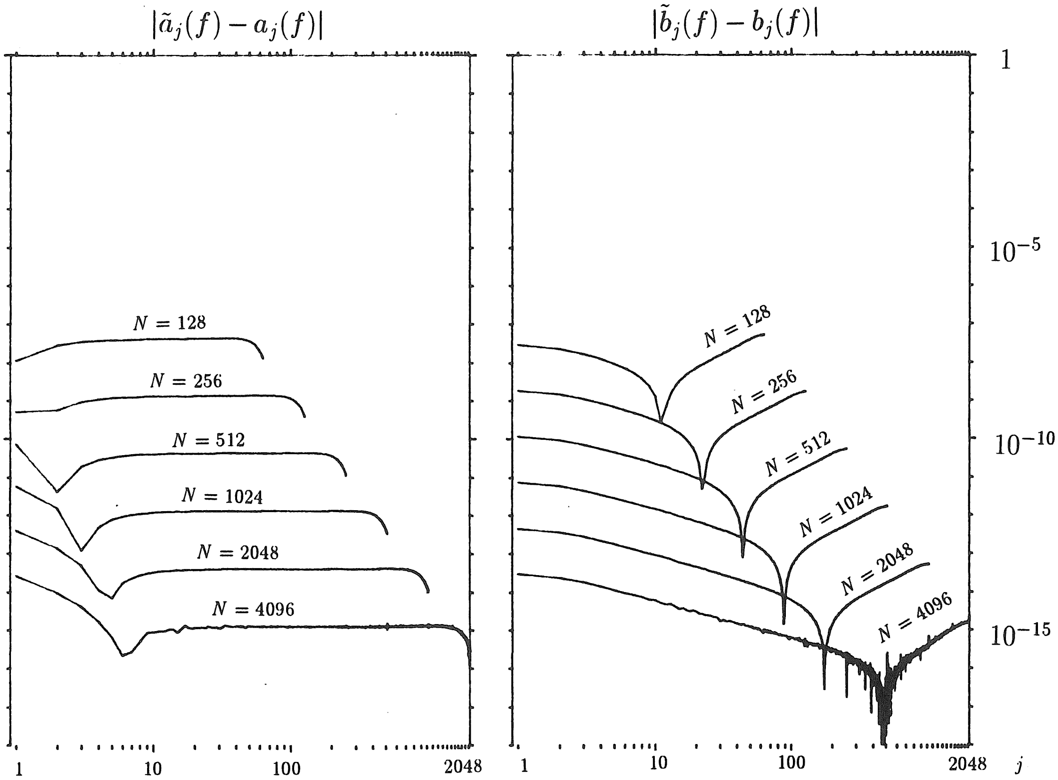


図. 3: $f_1(x)$ : $k = 3$ のとき微係数の差に近似値を使った場合の Fourier 係数の誤差

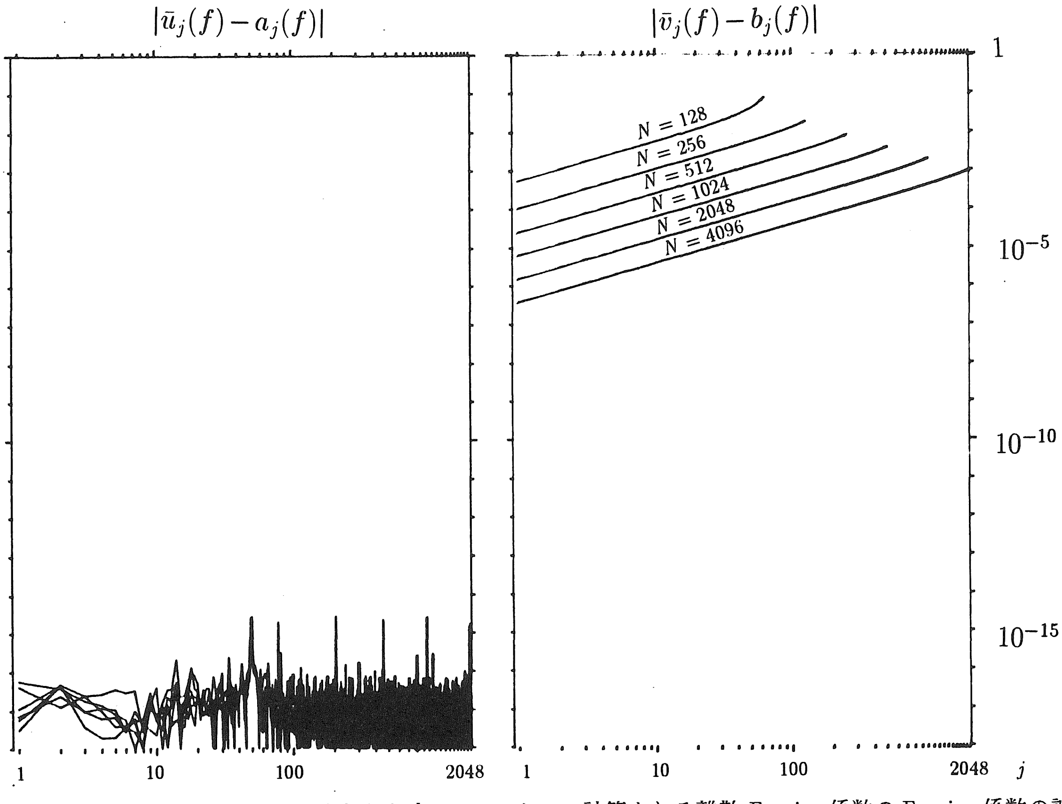


図. 4: $f_2(x)$ : $k = -1$ のときすなわち実 FFT によって計算される離散 Fourier 係数の Fourier 係数の誤差

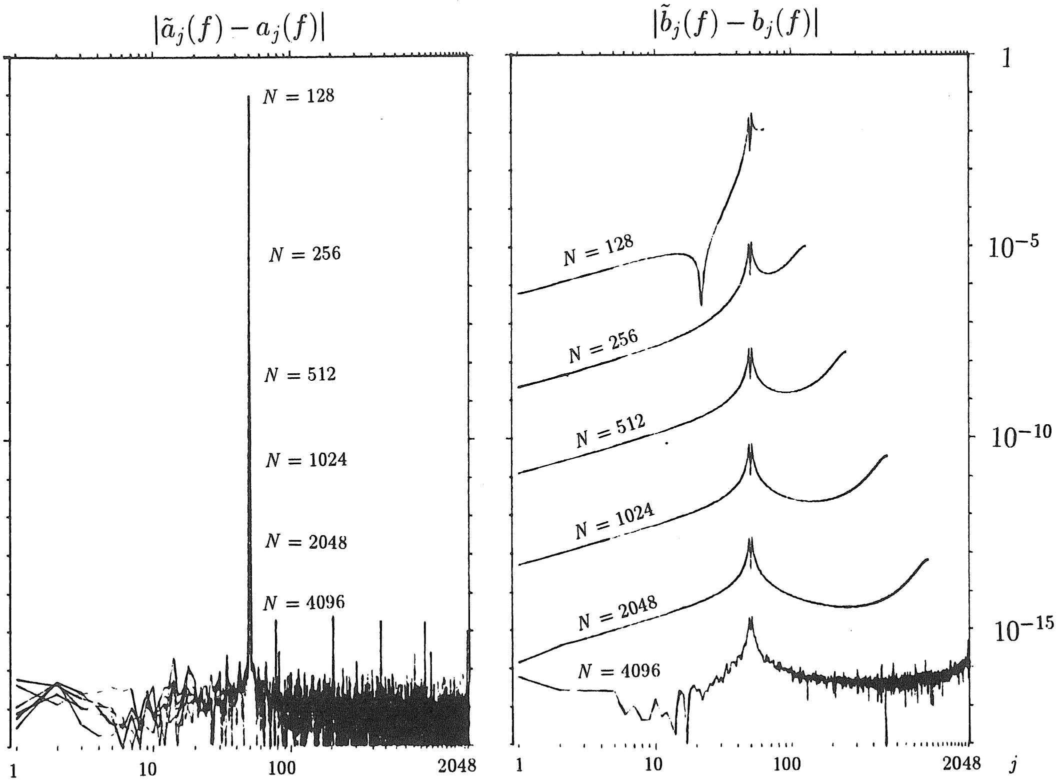


図. 5: $f_2(x)$ : $k = 7$ のとき微係数の差に正確な値を使った場合の Fourier 係数の誤差

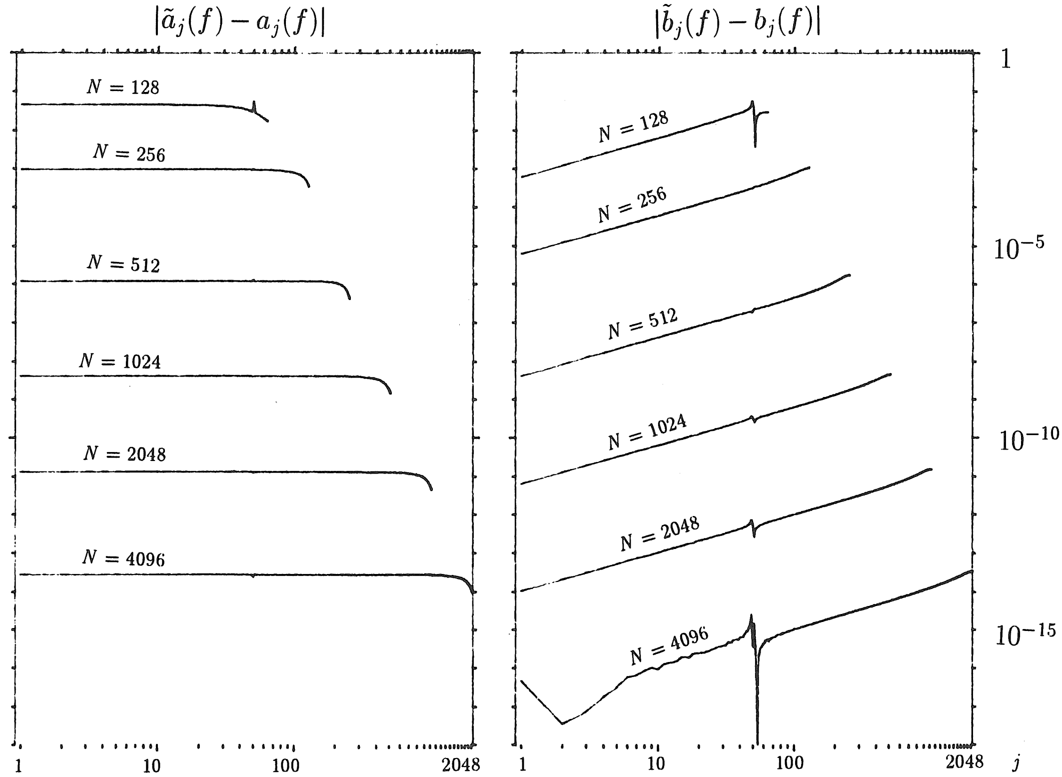


図. 6: $f_2(x)$ : $k = 7$ のとき微係数の差に近似値を使った場合の Fourier 係数の誤差

ていることがわかる。図 3 は $k=3$ のとき，計算に必要となる 2 次以下の微係数の差に Markoff の公式を使って得た近似値を用いた場合である。この場合では，Fourier 係数の誤差は微係数の差に真値を用いた場合に比べて増加しているが，誤差の最大値は $10^{-11}$ 以下になっており，ほぼ同じ程度のの誤差で Fourier 係数の近似値を計算できている。

次に $f_2(x)=x\cos 50x$ について Fourier 係数を計算した結果を示す。この関数は激しく振動するので Marsden と Taylor の方法ではうまくゆかない例である。

図 4 は $k=-1$，離散 Fourier 係数の Fourier 係数に対する誤差を示している。これから離散 Fourier 係数でも cos 係数については Fourier 係数のよい近似となっていることがわかる。しかし，sin 係数では誤差が大きいことがわかる。$N=1024$ の場合では誤差の最大値は $10^{-2}$ 程度となっている。図 5 は $k=7$，すなわち区間の両端における 6 次以下の微係数の差を用いた場合である。ここで，cos 係数において $j=50$ のとき得られた近似値の誤差が離散 Fourier 係数に比べて大きくなっているのが目につく。$j=50$ の時の誤差の大きさは sin 係数の誤差の最大値と同じ程度になっている。sin 係数においては先の $f_1(x)=\exp(x-\pi)$ の場合と同様に誤差は小さくなっているが，$j=50$ の付近において誤差が増加しているのがわかる。ただし，$N$ を大きくして行くにしたがって誤差は小さくなっていく。図 6 は $k=7$ のとき，計算に必要となる 6 次以下の微係数の差に Markoff の公式を使って得た近似値を用いた場合である。この場合では，先の $f_1(x)=\exp(x-\pi)$ の場合と同様に Fourier 係数の誤差は微係数の差に真値を用いた場合に比べて増加しているが，微係数の差に真値を用いた場合に見られた cos 係数の誤差の $j=50$ における増加は見られなくなっている。

これらの数値例から Fourier 積分の積分区間内において穏やかに変化するような関数の場合には少ない計算量で高精度に Fourier 積分の近似値を計算できることがわかる。

## 6. おわりに

Marsden と Taylor の Fourier 積分公式を用いた計算を実現するときに必要となる係数の具体的な計算式を導き，その Fourier 積分の計算手順を用いて，いくつかの関数についてその Fourier 係数を計算することにより Marsden と Taylor の Fourier 積分公式の有用性を確認した。この公式による Fourier 積分は，積分区間の両端における高次微係数の差を必要とするが，データ点の個数 $N$ や必要とする微係数の次数 $k$ を適当に取れば高精度に Fourier 積分を計算できることを確認した。しかし，これは被積分関数が積分区間内で穏やかな変化をする関数の場合であって，激しく振動するような関数においては良好な結果を得ることはできない。

また，Fourier 積分を計算するときに必要となる高次微係数の差の真値が与えられていない場合，数値微分公式の一つである Markoff の公式を使って得た高次微係数の差の近似値を用いた場合では，微係数の真値を用いた場合に比べて誤差は増加するが，データ点の個数 $N$ と必要とする微係数の次数 $k$ を適当に取ることにより十分な精度が得られることがわかった。

## 参考文献


1) Martin J. Marsden and Gerald D. Taylor., *NUMERICAL EVALUATION OF FOURIER INTEGRALS*, in Numerische Methoden der Approximations Theorie, Band I (Vortragsauszuge einer Tagung, Oberwolfach, 1971), pp.61–76 ;Internat. Schriftenreibe zur Numer. Math. Band 16, Birkhauser,Basel, 1972.

2) 河瀬聡, 秦野和郎, スプライン関数を使ったフーリエ係数の高精度計算, 1991 年度電気関係学会東海支部連合大会講演論文集, pp.9

3) 秦野和郎, Markoff の公式の誤差解析, 日本応用数理学会論文誌, Vol.1, No.3, 1991, pp.37–72


(受理　平成 4 年 3 月 20 日)